

北海道大学 2002 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について問いに答えよ.

$$a_1 = b$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{a_n} & (a_n \geq 1) \\ 2a_n & (a_n < 1) \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(1) $b = 2^k$ (k は整数) のとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

を求めよ.

(2) $0 < b < 1$ とする. $b \neq 2^k$ (k は整数) のとき, $a_n < 1 < a_{n+1}$ となる最小の自然数 n を m とする. このとき, 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

写像 $T(x)$ を、 $x < 1$ では 2 倍、 $x \geq 1$ では逆数をとる操作として見る。(1) では初期値が 2 の整数乗なので、有限回の操作で必ず 1 に到達することを示す。(2) では $0 < b < 1$ のため、初めて 1 を越えるまでは 2 倍を繰り返し、その直後から 4 周期に入ることを $\lambda = 2^m b$ とおいて明示する。

【解答】

(1) $b = 2^k$ とする. $k = 0$ のときは $a_1 = 1$ であり、漸化式より $a_2 = \frac{1}{a_1} = 1$ なので、以後すべて 1 である. $k > 0$ のとき、 $a_1 = 2^k \geq 1$ だから $a_2 = 2^{-k}$ である. その後は 1 未満の間は 2 倍されるので、有限回で 1 に到達する. 具体的には $2^{-k}, 2^{-k+1}, \dots, \frac{1}{2}, 1$ と進む. $k < 0$ のときは $a_1 = 2^k < 1$ であり、はじめから 2 倍を繰り返して有限回で 1 に到達する. いずれの場合も、ある番号以後は $1 \mapsto 1$ となる. したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

である.

(2) $0 < b < 1$ 、 $b \neq 2^k$ とする. $a_n < 1$ の間は $a_{n+1} = 2a_n$ なので、初めて 1 を越える直前までは $a_n = 2^{n-1}b$ である. m の定義より $a_m < 1 < a_{m+1}$ であり、したがって $2^{m-1}b < 1 < 2^m b$ である.

ここで $\lambda = 2^m b$ とおく. すると $1 < \lambda < 2$ であり、 $a_m = 2^{m-1}b = \frac{\lambda}{2}$, $a_{m+1} = 2^m b = \lambda$ である.

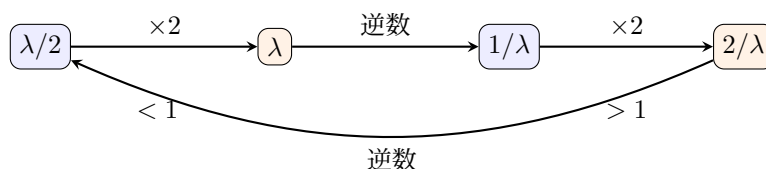
この後の項を漸化式で順に求めると、 $1 < \lambda < 2$ より $a_{m+2} = \frac{1}{\lambda}$ である. これは 1 未満なので $a_{m+3} = \frac{2}{\lambda}$ となる. さらに $1 < \lambda < 2$ だから $2/\lambda > 1$ であり、次は逆数をとって $a_{m+4} = \frac{\lambda}{2}$ である. これは a_m と同じなので、以後は 4 周期で繰り返す.

よって第 n 項は次のように表される. まず $1 \leq n \leq m+1$ では $a_n = 2^{n-1}b$ である. また $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$a_{m+4j} = \frac{\lambda}{2}, \quad a_{m+4j+1} = \lambda, \quad a_{m+4j+2} = \frac{1}{\lambda}, \quad a_{m+4j+3} = \frac{2}{\lambda}$$

である. ただし $\lambda = 2^m b$ である.

【しきい値 1 をまたいだ後の 4 周期】



▶ 解法 2

【方針】

正の数 a_n の 2 進対数 $x_n = \log_2 a_n$ を取る。漸化式を、 $x_n \geq 0$ なら符号反転、 $x_n < 0$ なら 1 を加える区分線形写像へ変換し、整数の場合の吸収と非整数の場合の 4 周期を読む。

【解答】

$$x_n = \log_2 a_n$$

と置くと、漸化式は

$$x_{n+1} = \begin{cases} -x_n & (x_n \geq 0), \\ x_n + 1 & (x_n < 0) \end{cases}$$

となる。

(1)

$b = 2^k$ なら $x_1 = k \in \mathbb{Z}$ である。整数 k は、負なら 1 ずつ増え、正なら一度符号を反転した後に 1 ずつ増えて、有限回で 0 に達する。0 は写像の不動点なので、以後 $x_n = 0$ 、したがって $a_n = 1$ である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

(2)

m の定義より

$$2^{m-1}b < 1 < 2^m b.$$

$\lambda = 2^m b$ と置けば $1 < \lambda < 2$ である。したがって

$$a_m = \frac{\lambda}{2}, \quad a_{m+1} = \lambda, \quad a_{m+2} = \frac{1}{\lambda}, \quad a_{m+3} = \frac{2}{\lambda}, \quad a_{m+4} = \frac{\lambda}{2}.$$

以後はこの 4 項を繰り返す。また、しきい値をまたぐまでは

$$a_n = 2^{n-1}b \quad (1 \leq n \leq m+1).$$

よって $j = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{aligned} a_{m+4j} &= \frac{\lambda}{2}, & a_{m+4j+1} &= \lambda, \\ a_{m+4j+2} &= \frac{1}{\lambda}, & a_{m+4j+3} &= \frac{2}{\lambda} \end{aligned}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20～26 分。1 未満では 2 倍、1 以上では逆数という写像を、しきい値を初めてまたぐ時刻 m の前後に分ける。 $b \neq 2^k$ により $1 < \lambda = 2^m b < 2$ が厳密に成り立ち、4 周期の各不等号が確定する。添字 $m, m+1, \dots$ のずれに注意する。

【第 2 問】

条件

$$f(0) = g(0) = 0, \quad f(-1) = -1, \quad g(1) = 0, \quad f'(0) = g'(0)$$

を満たす 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ のうち,

$$\int_{-1}^0 \{f'(x)\}^2 dx + \int_0^1 \{g'(x)\}^2 dx$$

が最小となるものを求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

2 次関数を係数で置き、条件 $f(0) = g(0) = 0$, $f(-1) = -1$, $g(1) = 0$, $f'(0) = g'(0)$ を使って係数を 1 つの文字にまとめ、あとは与えられた 2 つの積分をその文字の 2 次式として計算し、平方完成で最小値を与える係数を決める。

【解答】

$f(0) = 0$ より $f(x) = Ax^2 + Bx$ とおける。条件 $f(-1) = -1$ から $A - B = -1$ である。したがって $B = A + 1$ である。

また $g(0) = 0$ より $g(x) = Cx^2 + Dx$ とおける。条件 $g(1) = 0$ から $C + D = 0$ である。さらに $f'(x) = 2Ax + B$, $g'(x) = 2Cx + D$ だから、 $f'(0) = g'(0)$ より $B = D$ である。

以上から $B = A + 1$, $D = A + 1$, $C = -(A + 1)$ である。したがって $f(x) = Ax^2 + (A + 1)x$, $g(x) = -(A + 1)x^2 + (A + 1)x$ と表せる。

このとき $f'(x) = 2Ax + A + 1$, $g'(x) = (A + 1)(1 - 2x)$ である。求める積分を $I(A)$ とおくと

$$I(A) = \int_{-1}^0 (2Ax + A + 1)^2 dx + \int_0^1 \{(A + 1)(1 - 2x)\}^2 dx$$

である。

まず

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (2Ax + A + 1)^2 dx &= \int_{-1}^0 \{4A^2x^2 + 4A(A + 1)x + (A + 1)^2\} dx \\ &= \frac{4A^2}{3} - 2A(A + 1) + (A + 1)^2 \\ &= \frac{A^2}{3} + 1 \end{aligned}$$

である。また

$$\int_0^1 (1 - 2x)^2 dx = \frac{1}{3}$$

より

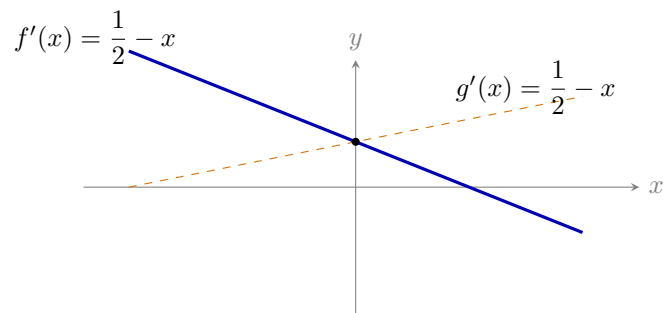
$$\int_0^1 \{(A + 1)(1 - 2x)\}^2 dx = \frac{(A + 1)^2}{3}$$

である。したがって $I(A) = \frac{A^2}{3} + 1 + \frac{(A + 1)^2}{3} = \frac{2}{3}(A^2 + A + 2)$ である。

平方完成すると $A^2 + A + 2 = \left(A + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$ であるから、 $I(A)$ は $A = -\frac{1}{2}$ のとき最小となる。このとき $B = A + 1 = \frac{1}{2}$, $C = -(A + 1) = -\frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{2}$ である。

よって求める 2 次関数は $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ である。

【最小時の導関数】



▶ 解法 2

【方針】

共通の初期傾き $p = f'(0) = g'(0)$ を唯一の変数として 2 つの二次関数を表す。積分値を p の二次式に整理し、平方完成して最小点を決める。

【解答】

共通の傾きを

$$p = f'(0) = g'(0)$$

と置く。 $f(0) = 0$ より $f(x) = Ax^2 + px$ であり、 $f(-1) = -1$ から $A = p - 1$ である。同様に $g(0) = g(1) = 0$ と $g'(0) = p$ から

$$g(x) = -px^2 + px$$

である。したがって

$$f'(x) = 2(p-1)x + p, \quad g'(x) = p(1-2x).$$

求める積分値を $I(p)$ とすると

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_{-1}^0 \{2(p-1)x + p\}^2 dx + \int_0^1 p^2(1-2x)^2 dx \\ &= \frac{2}{3}(p^2 - p + 2) \\ &= \frac{2}{3} \left\{ \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right\}. \end{aligned}$$

よって最小となるのは $p = 1/2$ のときである。このとき

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$$

なお、条件を満たす二次関数の組は p ごとに一意なので、これが唯一の最小解である。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 16～21 分。4 つの係数を別々に最適化するのではなく、端点条件と共通接線条件で自由度が 1 つになることを先に確認する。共通傾き p を用いると式が対称的になる。積分後の二次式を平方完成し、唯一の最小解まで述べる。

【第 3 問】

xy 平面において放物線 $y = ax^2 + b$ ($a \neq 0$) を考える. この放物線と, ちょうど 2 つの共有点をもつ円 $x^2 + y^2 = r^2$ で $0 < r < -b$ を満たすものが存在するとする.

- (1) a, b が満たす条件を求めよ.
 (2) a, b が (1) の条件を満たすとき, $a^2 + b^2$ の値の範囲を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

円と放物線の共有点では $u = x^2$ とおくと 2 次方程式になる. $0 < r < -b$ から $b < 0$ かつ定数項が正であるため, 共有点がちょうど 2 つになるには, u の方程式が正の重解をもつ必要がある. 判別式 0, 重解正, $0 < r < -b$ を順に整理する.
 (2) は $c = -b > 0$ において $ac > 1/2$ のもとで $a^2 + c^2$ の範囲を出す.

【解答】

(1) 共有点では $y = ax^2 + b$ かつ $x^2 + y^2 = r^2$ である. これを代入すると $x^2 + (ax^2 + b)^2 = r^2$ である. ここで $u = x^2$ ($u \geq 0$) とおくと $a^2u^2 + (2ab + 1)u + b^2 - r^2 = 0$ を得る.

条件 $0 < r < -b$ から, まず $b < 0$ である. また $r < -b$ なので $b^2 - r^2 > 0$ であり, 上の u の 2 次方程式の定数項は正である.

正の異なる 2 根をもつと, 各正の根 u から $x = \pm\sqrt{u}$ が出るため, 共有点は 4 つになる. 負の根は共有点を与えない. したがって共有点がちょうど 2 つになるには, u の方程式が正の重解をもつ必要がある.

判別式を 0 とすると $(2ab + 1)^2 - 4a^2(b^2 - r^2) = 0$ である. 整理すると $4ab + 1 + 4a^2r^2 = 0$ すなわち $r^2 = -\frac{4ab + 1}{4a^2}$ である. また重解は $u = -\frac{2ab + 1}{2a^2}$ であるから, これが正である条件は $2ab + 1 < 0$ すなわち $ab < -\frac{1}{2}$ である.

この条件と $b < 0$ から $a > 0$ である. また $r^2 = -\frac{4ab + 1}{4a^2} > 0$ であり, さらに $b^2 - r^2 = b^2 + \frac{4ab + 1}{4a^2} = \frac{(2ab + 1)^2}{4a^2} > 0$ なので $r < -b$ も満たされる.

したがって求める条件は $b < 0$, $ab < -\frac{1}{2}$ である.

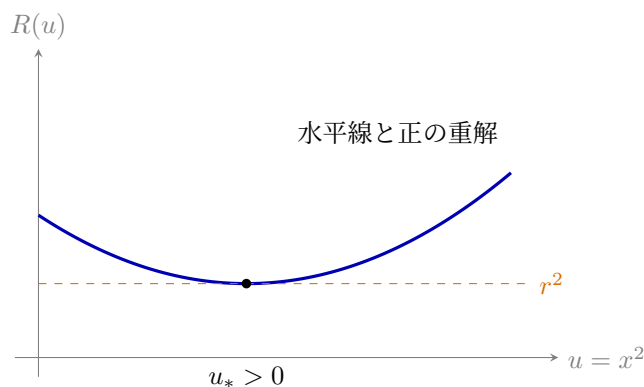
(2) (1) の条件から $b < 0$, $a > 0$ である. そこで $c = -b$ ($c > 0$) とおくと, 条件 $ab < -1/2$ は $ac > \frac{1}{2}$ となる. 求めたい量は $a^2 + b^2 = a^2 + c^2$ である.

相加相乗平均より $a^2 + c^2 \geq 2ac$ である. ここで $ac > 1/2$ だから $a^2 + c^2 > 1$ である.

逆に, 任意の $T > 1$ に対して $a = c = \sqrt{\frac{T}{2}}$ とおけば $a^2 + c^2 = T$ であり, $ac = \frac{T}{2} > \frac{1}{2}$ を満たす. このとき $b = -c < 0$ とすれば (1) の条件を満たす.

したがって $a^2 + b^2$ の値の範囲は $a^2 + b^2 > 1$ である.

【半径平方 $R(u) = u + (au + b)^2$ 】



▶ 解法 2

【方針】

円との共有点での半径平方を $u = x^2$ の関数 $R(u) = u + (au + b)^2$ と見る。ちょうど 2 点で交わることを、 $u > 0$ における R の最小値へ水平線が接する条件に読み替える。

【解答】

(1)

放物線上で $u = x^2 \geq 0$ と置くと、原点からの距離の平方は

$$R(u) = u + (au + b)^2 = a^2 u^2 + (2ab + 1)u + b^2.$$

条件 $0 < r < -b$ から $b < 0$ であり、 $r^2 < b^2 = R(0)$ である。

円 $x^2 + y^2 = r^2$ とちょうど 2 点で交わるには、方程式 $R(u) = r^2$ が正の重解 u_* をもてばよい。 R は上に凸で、その頂点は

$$u_* = -\frac{2ab + 1}{2a^2}.$$

これが正である条件は

$$ab < -\frac{1}{2}.$$

このとき $b < 0$ と合わせて $a > 0$ であり、

$$r^2 = R(u_*) = -\frac{4ab + 1}{4a^2} > 0.$$

さらに

$$b^2 - r^2 = \frac{(2ab + 1)^2}{4a^2} > 0$$

なので $r < -b$ も満たす。ゆえに必要な十分条件は

$$b < 0, \quad ab < -\frac{1}{2}.$$

(2)

$c = -b > 0$ と置くと条件は $ac > 1/2$ である。したがって

$$a^2 + b^2 = a^2 + c^2 \geq 2ac > 1.$$

逆に任意の $T > 1$ に対し

$$a = c = \sqrt{\frac{T}{2}}, \quad b = -c$$

と取れば、 $a^2 + b^2 = T$ かつ $ac = T/2 > 1/2$ を満たす。よって値の範囲は

$$a^2 + b^2 > 1$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 24~30 分。 $u = x^2$ の正の 1 解は $x = \pm\sqrt{u}$ の 2 共有点を生む。定数項が正なので、ちょうど 2 点となるのは正の重解の場合である。半径平方 $R(u)$ の最小値として見ると、判別式計算と $r < -b$ の確認が一つの図で整理できる。

【第 4 問】

原点 O を中心とする半径 r の球面上に相異なる 3 点 A, B, C をとる. 線分 OA と線分 OB は垂直とし, $\angle AOC$ と $\angle BOC$ の大きさの和は 120° であるとする.

- (1) 線分 OA と線分 OC が垂直であるとき, $\left(\frac{CB}{AB}\right)^2$ を求めよ.
 (2) 直線 AB 上の点と点 C との最短距離 d を最大とする $\angle AOC$ の大きさを求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

半径 r は長さの比や角度の最大化に影響しないので, 座標軸を OA, OB 方向に取り, 必要なら半径 1 で考える. (1) は余弦定理で CB^2 と AB^2 を出す. (2) は $\angle AOC = \alpha, \angle BOC = \beta$ とし, $\alpha + \beta = 120^\circ$ のもとで C の成分を $(\cos \alpha, \cos \beta, z)$ と置く. 直線 AB までの距離を $t = \alpha - 60^\circ$ の関数にして最大化する.

【解答】

(1) $OA \perp OC$ であるから $\angle AOC = 90^\circ$ である. 条件より $\angle AOC + \angle BOC = 120^\circ$ なので $\angle BOC = 30^\circ$ である.

三角形 BOC に余弦定理を用いると, $OB = OC = r$ だから $CB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 30^\circ = 2r^2 - \sqrt{3}r^2 = r^2(2 - \sqrt{3})$ である. また $OA \perp OB$ より三角形 AOB は直角二等辺型で $AB^2 = r^2 + r^2 = 2r^2$ である. したがって

$$\left(\frac{CB}{AB}\right)^2 = \frac{r^2(2 - \sqrt{3})}{2r^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

である.

(2) 半径を 1 として考える. 最後に距離は r 倍されるだけなので, 最大となる角度は変わらない. OA, OB をそれぞれ x 軸, y 軸方向に取り $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$ とする. $\angle AOC = \alpha, \angle BOC = \beta$ とおくと $\alpha + \beta = 120^\circ$ である. 点 C を $C = (X, Y, Z)$ とすると, 内積から $X = \cos \alpha, Y = \cos \beta$ である. したがって $C = (\cos \alpha, \cos \beta, Z)$ と書け, 球面上にあるので $Z^2 = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$ である.

直線 AB は平面 $z = 0$ 上にあり, xy 平面内では $x + y = 1$ で表される. よって C から直線 AB までの距離 d について $d^2 = Z^2 + \frac{(\cos \alpha + \cos \beta - 1)^2}{2}$ である.

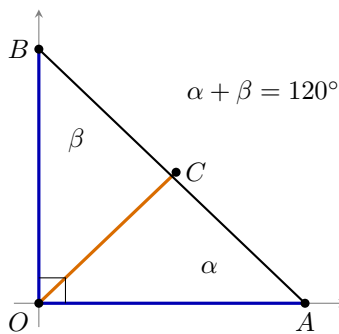
ここで $\alpha = 60^\circ + t, \beta = 60^\circ - t$ とおく. すると $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos 60^\circ \cos t = \cos t$ であり, また $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \frac{3}{2} - \cos^2 t$ である. したがって $Z^2 = \cos^2 t - \frac{1}{2}$ であり, 点 C が存在するためには $\cos^2 t \geq \frac{1}{2}$ が必要である. ここでは α, β が角で, $\alpha + \beta = 120^\circ$ なので $\cos t > 0$ と見てよく, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \cos t \leq 1$ である.

よって

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\cos^2 t - \frac{1}{2}\right) + \frac{(\cos t - 1)^2}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cos^2 t - \cos t \\ &= \left(\frac{3}{2} \cos t - 1\right) \cos t \end{aligned}$$

である. $u = \cos t$ とおくと, $1/\sqrt{2} \leq u \leq 1$ で $d^2 = \frac{3}{2}u^2 - u$ である. この関数は $\frac{d}{du} \left(\frac{3}{2}u^2 - u\right) = 3u - 1 > 0$ を満たすので, この範囲では u が大きいほど大きい. したがって最大は $u = 1$ のとき, すなわち $t = 0$ のときである.

よって $\angle AOC = 60^\circ$ である.

【直交する OA, OB と点 C 】

▶ 解法 2

【方針】

半径を 1 に規格化し、 OA, OB を座標軸に取る。 C の 2 つの方向余弦を $\alpha = \angle AOC, \beta = \angle BOC$ で表し、直線 AB への距離を射影成分と垂直成分に分解して一変数化する。

【解答】

(1)

$\angle AOC = 90^\circ$ なので $\angle BOC = 30^\circ$ である。余弦定理より

$$CB^2 = 2r^2(1 - \cos 30^\circ) = r^2(2 - \sqrt{3}), \quad AB^2 = 2r^2.$$

したがって

$$\left(\frac{CB}{AB}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}.$$

(2)

角度だけを求めるので $r = 1$ とする。

$$A = (1, 0, 0), \quad B = (0, 1, 0)$$

と置き、 $\alpha = \angle AOC, \beta = \angle BOC$ とする。すると

$$\alpha + \beta = 120^\circ, \quad C = (\cos \alpha, \cos \beta, Z).$$

直線 AB は $z = 0, x + y = 1$ だから

$$d^2 = Z^2 + \frac{(\cos \alpha + \cos \beta - 1)^2}{2}.$$

$$\alpha = 60^\circ + t, \quad \beta = 60^\circ - t$$

と置くと

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos t, \quad Z^2 = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = \cos^2 t - \frac{1}{2}.$$

点 C が存在する範囲では

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u := \cos t \leq 1.$$

よって

$$d^2 = \frac{3}{2}u^2 - u.$$

この区間で導関数 $3u - 1$ は正だから、 d^2 は $u = 1$ のとき最大である。すなわち $t = 0$ であり、

$$\angle AOC = 60^\circ.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 25～32 分。空間内の点 C は方向余弦 $\cos \alpha, \cos \beta$ と残りの垂直成分で表す。存在条件 $Z^2 \geq 0$ が $u = \cos t$ の範囲を決めるため、これを省略して全実数上で最大化してはいけな。半径 r は距離全体を比例拡大するだけで、最大角には影響しない。