

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2003 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面上の放物線 $A : y = x^2$, $B : y = -(x - a)^2 + b$ は異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 > x_2$) で交わるとする.

- (1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ.
- (2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a , b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ.
- (3) $|\overrightarrow{PQ}| = 2$ を満たしながら a , b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ.

第 2 問

z を複素数とし, i を虚数単位とする.

- (1) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ.
- (2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w = \frac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ.

第 3 問

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす．この容器の底に排水口がある．時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する．時刻 t において容器に残っている水の深さを h ，体積を V とする． V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる．

- (1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ．
- (2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ．

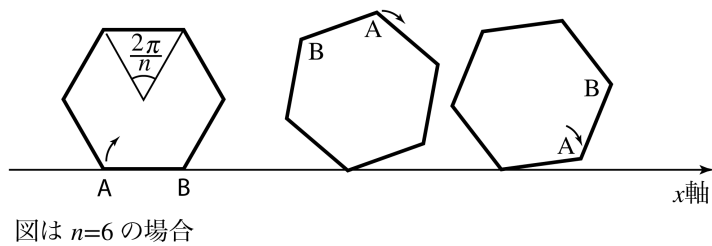
第 4 問

点 P は数直線上を原点 O を出発点として、確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み、または負の向きに 1 進むとする. n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す.

- (1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ.
- (2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ.
- (3) P が 6 回目の移動が終わった時点で、一度も O に戻っていない確率を求めよ.

第 5 問

半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある．ひとつの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける．点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする．



(1) $L(6)$ を求めよ．

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$$

を求めよ．

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)