

北海道大学 2003 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上の放物線 $A: y = x^2$, $B: y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ ($x_1 > x_2$) で交わり、

- (1) $x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ.
- (2) $x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ.
- (3) $|\overrightarrow{PQ}| = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 線分 PQ の中点の y 座標の最小値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

交点の x 座標 x_1, x_2 を、2 つの放物線を等置して得られる 2 次方程式の 2 解として扱う。解と係数の関係から $x_1 + x_2 = a$, $(x_1 - x_2)^2 = 2b - a^2$ を出すと、(1) はすぐに決まる。(2) では放物線 $y = x^2$ 上の 2 点を結ぶ直線 $y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2$ を使い、 a を媒介変数とする直線族の通過領域を固定した x ごとの最大値で調べる。(3) は長さ条件から $x_1 - x_2$ を a で表し、中点の y 座標を $b/2$ に直して一変数で最小化する。

【解答】

(1)

交点の x 座標は $x^2 = -(x-a)^2 + b$ を満たす。これを整理すると $2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$ である。2 つの解を x_1, x_2 とすると、解と係数の関係より $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = \frac{a^2 - b}{2}$ である。

したがって

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \\ &= a^2 - 4 \cdot \frac{a^2 - b}{2} \\ &= 2b - a^2.\end{aligned}$$

条件 $x_1 - x_2 = 2$ より $4 = 2b - a^2$ だから $b = \frac{a^2 + 4}{2}$ である。

(2)

放物線 $A: y = x^2$ 上の 2 点 (x_1, x_1^2) , (x_2, x_2^2) を結ぶ直線の傾きは $\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$ である。よって直線 PQ は $y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2$ と書ける。

(1) の条件 $x_1 - x_2 = 2$ のもとでは

$$x_1 + x_2 = a, \quad x_1x_2 = \frac{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2}{4} = \frac{a^2 - 4}{4} = \frac{a^2}{4} - 1$$

である。したがって直線 PQ は $y = ax - \left(\frac{a^2}{4} - 1\right) = 1 + ax - \frac{a^2}{4}$ である。

ここで a は任意の実数として動く。固定した x に対して $1 + ax - \frac{a^2}{4} = 1 + x^2 - \frac{(a - 2x)^2}{4}$ であるから、右辺の最大値は $1 + x^2$ であり、これは $a = 2x$ のときに実現する。一方、 $|a|$ を十分大きくすると $-a^2/4$ の項により値はいくらでも小さくなる。

したがって、直線 PQ の通過する領域は $y \leq x^2 + 1$ である。境界 $y = x^2 + 1$ も含む。

(3)

直線 PQ の傾きは $x_1 + x_2 = a$ である。したがって、 x 座標の差を $d = x_1 - x_2$ とすると $|\overrightarrow{PQ}| = d\sqrt{1 + a^2}$ である。ここで $x_1 > x_2$ なので $d > 0$ である。

条件 $|\overrightarrow{PQ}| = 2$ より $d^2 = \frac{4}{1 + a^2}$ である。一方、(1) の計算と同じく $d^2 = 2b - a^2$ だから $2b - a^2 = \frac{4}{1 + a^2}$ であり、 $b = \frac{1}{2} \left(a^2 + \frac{4}{1 + a^2} \right)$ である。

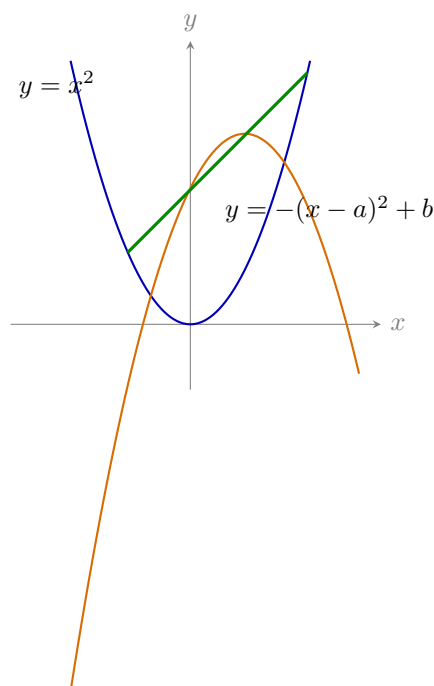
線分 PQ の中点の y 座標は

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{2} = \frac{a^2 - (a^2 - b)}{2} = \frac{b}{2}$$

である。したがって中点の y 座標は $\frac{b}{2} = \frac{1}{4} \left(a^2 + \frac{4}{1+a^2} \right)$ である。 $s = a^2$ とおくと $s \geq 0$ であり、求める値は $F(s) = \frac{s}{4} + \frac{1}{1+s}$ の最小値である。微分すると $F'(s) = \frac{1}{4} - \frac{1}{(1+s)^2}$ である。 $F'(s) = 0$ より $(1+s)^2 = 4$ であり、 $s \geq 0$ だから $s = 1$ である。 $0 \leq s < 1$ では $F'(s) < 0$ 、 $s > 1$ では $F'(s) > 0$ なので、ここで最小となる。

したがって最小値は $F(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ である。

【二つの放物線と共通弦】



▶ 解法 2

【方針】

交点の中点を m 、 x 座標の半差を $t > 0$ とし、 $x_1 = m + t$ 、 $x_2 = m - t$ と置く。和と差が最初から分離され、弦の式、通過領域、長さ条件、中点の高さを同じ二変数 m, t で処理できる。

【解答】

交点の x 座標を

$$x_1 = m + t, \quad x_2 = m - t \quad (t > 0)$$

と置く。交点方程式の解の和が a だから $a = 2m$ である。また

$$(x_1 - x_2)^2 = 4t^2 = 2b - a^2$$

である。

(1) $x_1 - x_2 = 2$ より $t = 1$ なので

$$b = \frac{a^2 + 4}{2}.$$

(2) $y = x^2$ 上の二点を結ぶ弦は

$$y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2 = 2mx - (m^2 - t^2).$$

$t = 1$ だから

$$y = 1 + 2mx - m^2 = 1 + x^2 - (m - x)^2.$$

m は任意の実数を動くので、通過領域は

$$y \leq x^2 + 1$$

である。

(3) 弦の傾きは $2m$ だから

$$|\overrightarrow{PQ}| = 2t\sqrt{1+4m^2} = 2.$$

よって $t^2 = 1/(1+4m^2)$ である。中点の高さは

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} = m^2 + t^2 = m^2 + \frac{1}{1+4m^2}.$$

$s = m^2 \geq 0$ と置けば

$$G(s) = s + \frac{1}{1+4s}, \quad G'(s) = 1 - \frac{4}{(1+4s)^2}.$$

したがって $s = 1/4$ で最小となり、最小値は

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 25～32 分。2 つの放物線の交点を直接求めるのではなく、交点の x 座標を 2 次方程式の 2 解として扱うのが全体の軸である。(2) では直線族 $y = 1 + ax - a^2/4$ を固定した x ごとに平方完成し、境界を含む $y \leq x^2 + 1$ と判断する。(3) は長さ条件のため $x_1 - x_2$ が一定ではなくなる点に注意したい。中点の y 座標が $b/2$ になる計算を明示すると、最小化まで自然につながる。

【第 2 問】

z を複素数とし、 i を虚数単位とする。

- (1) $\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i}$ が実数となる点 z 全体の描く図形 P を複素数平面上に図示せよ。
- (2) z が上で求めた図形 P 上を動くときに $w = \frac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $z = x + yi$ とおき、 $2z/(z^2 + 1)$ の虚部が 0 になる条件を計算する。定義できない $z = \pm i$ は最後に除く必要がある。
 (2) は $w = (z+i)/(z-i)$ を $z = i(w+1)/(w-1)$ と解き、(1) で得た実軸と単位円をそれぞれ w 平面へ移す。実軸は $|w| = 1$ 、単位円は $|w+1| = |w-1|$ 、すなわち虚軸になる。対応しない点、特に $w = 1$ と $w = 0$ の除外も確認する。

【解答】

(1) $z = x + yi$ とおく。ただし、もとの式に分母があるので $z \neq i$, $z \neq -i$ である。

まず

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{(z-i) + (z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{2z}{z^2 + 1}$$

である。ここで $z^2 + 1 = (x + yi)^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + 2xyi$ だから、 $\frac{2z}{z^2 + 1} = \frac{2(x + yi)}{x^2 - y^2 + 1 + 2xyi}$ である。分母の共役を掛けると、虚部の分子は $2\{y(x^2 - y^2 + 1) - x(2xy)\} = 2y(1 - x^2 - y^2)$ である。したがって、この値が実数となる条件は $y(1 - x^2 - y^2) = 0$ である。

よって図形 P は $y = 0$ または $x^2 + y^2 = 1$ である。ただし $z = i, -i$ は式が定義されないで、単位円上の点 $(0, 1), (0, -1)$ は除く。

(2) $w = \frac{z+i}{z-i}$ を z について解く。 $w(z-i) = z+i$ より $z(w-1) = i(w+1)$ であるから、 $w \neq 1$ で $z = i\frac{w+1}{w-1}$ である。

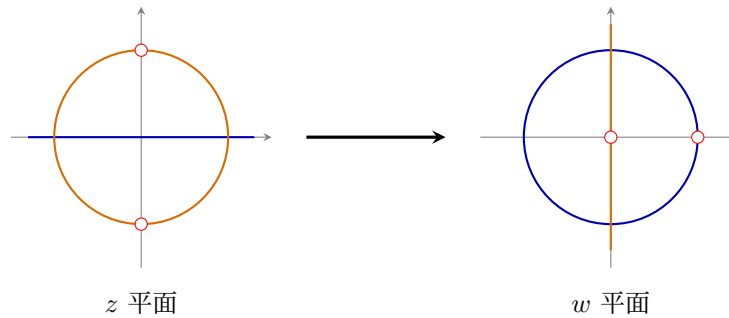
まず、 z が実軸上を動く場合を考える。 z が実数なら $w = \frac{z+i}{z-i}$ において、分子と分母は互いに共役である。したがって $|w| = 1$ である。逆に $|w| = 1$ かつ $w \neq 1$ なら、 $z = i(w+1)/(w-1)$ は実数になる。よって実軸部分の像は $|w| = 1$, $w \neq 1$ である。

次に、 z が単位円 $|z| = 1$ 上を動く場合を考える。 $z = i(w+1)/(w-1)$ を代入すると $\left| \frac{w+1}{w-1} \right| = 1$ であり、 $|i| = 1$ だから $|w+1| = |w-1|$ である。これは、 w 平面で -1 と 1 から等距離にある点全体なので、虚軸である。 $w = X + Yi$ と書けば $X = 0$ である。

ただし、(1) で除いた $z = -i$ は $w = \frac{-i+i}{-i-i} = 0$ に対応するので、 $w = 0$ は除く。また $z = i$ はもとの w の分母を 0 にする点であり、有限な w には対応しない。したがって単位円部分の像は $\operatorname{Re} w = 0, w \neq 0$ である。

以上より、 w の描く図形は $|w| = 1$ ($w \neq 1$) と $\operatorname{Re} w = 0$ ($w \neq 0$) の和集合である。

【実軸と単位円の像】



▶ 解法 2

【方針】

(1) はもとの式とその共役が等しい条件を整理し、実軸と単位円を得る。(2) では一次分数変換を距離比として読む。実軸上では z から $\pm i$ までの距離が等しいので $|w| = 1$ 。単位円上では逆変換を代入して $|w+1| = |w-1|$ を得る。

【解答】

(1)

$$\frac{1}{z+i} + \frac{1}{z-i} = \frac{2z}{z^2+1}.$$

$z = x + yi$ として、この数がその共役と等しい条件を整理すると

$$y(1 - x^2 - y^2) = 0$$

となる。したがって

$$P: y = 0 \quad \text{または} \quad x^2 + y^2 = 1,$$

ただし $z = \pm i$ を除く。

(2)

$$|w| = \frac{|z+i|}{|z-i|}.$$

z が実軸上にあれば $|z+i| = |z-i|$ だから $|w| = 1$ である。ただし有限の z から $w = 1$ は得られない。

一方

$$z = i \frac{w+1}{w-1}$$

だから、 $|z| = 1$ は

$$|w+1| = |w-1|$$

と同値である。これは虚軸を表す。除外点 $z = -i$ に対応する $w = 0$ も除く。

よって像は

$$|w| = 1 \quad (w \neq 1) \quad \text{と} \quad \operatorname{Re} w = 0 \quad (w \neq 0)$$

の和集合である。

【総評】 難度 6、計算量 5。目安時間は 20～25 分。複素数平面の問題だが、(1) は実部・虚部に分けて虚部を 0 にする計算で確実に処理できる。(2) では一次分数変換を逆に解くと、実軸と単位円の像がそれぞれ単位円と虚軸になる。最も落としやすいのは除外点で、 $z = \pm i$ がもとの式や w の分母に関わるため、 $w = 1$ と $w = 0$ の扱いまで書く必要がある。

【第 3 問】

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす. この容器の底に排水口がある. 時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する. 時刻 t において容器に残っている水の深さを h , 体積を V とする. V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる.

- (1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ.
- (2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

水深が h のとき、曲線 $y = x^2$ から高さ y における半径は $\sqrt{y}$ である. したがって水平断面積は πy 、体積は

$$V(h) = \int_0^h \pi y \, dy$$

と求まる. あとは $dV/dt = (dV/dh)(dh/dt)$ を使って dh/dt を出す. (2) は初期水深 $h = 1$ から $h = 0$ までの時間を、微分方程式を分離して積分する.

【解答】

(1)

高さ y における容器の半径を考える. 容器は $y = x^2$ を y 軸のまわりに回転してできるので、高さ y では $x = \sqrt{y}$ である. したがって、その水平断面は半径 $\sqrt{y}$ の円であり、断面積は $\pi(\sqrt{y})^2 = \pi y$ である.

水深が h のときの水の体積は

$$V = \int_0^h \pi y \, dy = \frac{\pi h^2}{2}$$

である. よって $\frac{dV}{dh} = \pi h$ である.

変化率の連鎖を用いると $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}$ である. 問題文より $dV/dt = -\sqrt{h}$ だから $-\sqrt{h} = \pi h \frac{dh}{dt}$ となる. 排水中は $h > 0$ なので、 $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$ である.

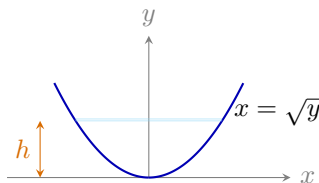
(2)

容器は最初満水であり、曲線は $0 \leq x \leq 1$ なので、初めの水深は $h = 1$ である. 完全に排水されたときは $h = 0$ である.

(1) より $\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$ だから、 $\frac{dt}{dh} = -\pi\sqrt{h}$ である. 時間は正になるように、 $h = 1$ から $h = 0$ まで積分して

$$T = \int_1^0 (-\pi\sqrt{h}) \, dh = \pi \int_0^1 \sqrt{h} \, dh$$

である. したがって $T = \pi \left[\frac{2}{3} h^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}$ である.

【水深 h の回転容器】

▶ 解法 2

【方針】

水深 h を消去し、体積 V だけの微分方程式にする。 $V = \pi h^2/2$ から $h = (2V/\pi)^{1/2}$ を得て、与えられた排水率を $dV/dt = -(2V/\pi)^{1/4}$ と書き、満水時の体積から 0 まで積分する。

【解答】

(1) 水深 h のとき

$$V = \int_0^h \pi y \, dy = \frac{\pi h^2}{2}.$$

したがって

$$\frac{dV}{dt} = \pi h \frac{dh}{dt} = -\sqrt{h}$$

より

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}.$$

(2)

$$h = \left(\frac{2V}{\pi}\right)^{1/2}$$

なので

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{2V}{\pi}\right)^{1/4}.$$

満水時は $V = \pi/2$ 、排水完了時は $V = 0$ だから

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} \int_0^{\pi/2} V^{-1/4} \, dV \\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/4} \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/4} \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 4、計算量 4。目安時間は 12～15 分。回転体の体積を水深 h の関数として表し、与えられた dV/dt とつなぐだけの素直な問題である。断面半径を y ではなく $\sqrt{y}$ と読む点、満水時の水深が 1 である点、排水では積分区間の向きが逆になる点に注意する。途中で $h = 0$ では式 dh/dt が発散するが、時間積分は有限に収まる。

【第 4 問】

点 P は数直線上を原点 O を出発点として、確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み、または負の向きに 1 進むとする。 n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

- (1) $X(8) = 2$ となる確率を求めよ。
- (2) $|X(7)|$ の期待値を求めよ。
- (3) P が 6 回目の移動が終わった時点で、一度も O に戻っていない確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

各移動を $+1$ または -1 の列として数える。 n 回後の座標は正方向の回数を r とすると $2r - n$ である。(2) は 7 回後の座標が奇数だけになることと左右対称性を使い、正の座標だけを 2 倍して期待値を計算する。(3) は「6 回目に原点でない」ではなく「途中で一度も原点に戻らない」条件である。最初の 1 歩の向きで分け、正側に出了場合の正のまま進む経路を数え、負側は対称性で同数とする。

【解答】

(1)

8 回のうち正の向きに進む回数を r とする。このとき負の向きに進む回数は $8 - r$ であり、 $X(8) = r - (8 - r) = 2r - 8$ である。 $X(8) = 2$ となるには $2r - 8 = 2$ すなわち $r = 5$ であればよい。

したがって、8 回のうち正方向への移動を 5 回選ぶので $P(X(8) = 2) = \frac{{}_8C_5}{2^8} = \frac{56}{256} = \frac{7}{32}$ である。

(2)

7 回後の座標は $-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7$ のいずれかである。正方向の回数を r とすると $X(7) = 2r - 7$ である。

左右対称性を用いて、正の座標だけを数えて 2 倍する。正の座標 $1, 3, 5, 7$ に対応する正方向の回数はそれぞれ $r = 4, 5, 6, 7$ である。したがって

$$\begin{aligned} E(|X(7)|) &= \frac{2}{2^7} (1 \cdot {}_7C_4 + 3 \cdot {}_7C_5 + 5 \cdot {}_7C_6 + 7 \cdot {}_7C_7) \\ &= \frac{2}{128} (35 + 63 + 35 + 7) \\ &= \frac{280}{128} = \frac{35}{16}. \end{aligned}$$

(3)

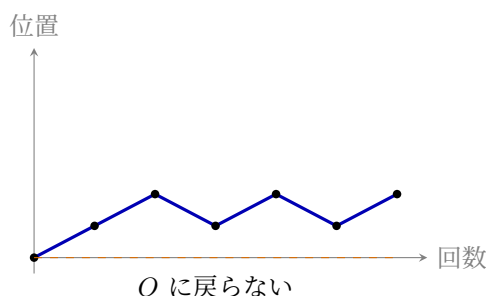
6 回の移動が終わるまで一度も O に戻らない経路を数える。全経路は $2^6 = 64$ 通りである。

まず第 1 歩が正の向きである場合を考える。この場合、各時点の座標が常に正であればよい。6 歩後の座標は正の偶数なので、可能な終点は $2, 4, 6$ である。

6 歩で終点が 2 となる経路は、正方向 4 回、負方向 2 回である。このうち途中で 0 に戻らず常に正であるものは、投票型の数え上げにより $\frac{2}{6} {}_6C_4 = 5$ 通りである。同様に終点が 4 のものは $\frac{4}{6} {}_6C_5 = 4$ 通り、終点が 6 のものは ${}_6C_6 = 1$ 通りである。したがって、第 1 歩が正の向きの場合は $5 + 4 + 1 = 10$ 通りである。

第 1 歩が負の向きの場合も、符号をすべて反対にする対応により同じく 10 通りである。よって条件を満たす経路は 20 通りであり、求める確率は $\frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ である。

【原点へ戻らない経路】



▶ 解法 2

【方針】

(1),(2) は二項分布をそのまま用いる。(3) は投票公式を使わず、第 1 歩を正に固定した後の「正の位置にとどまる経路数」を時刻ごとの表で更新する。負側は符号反転で同数になる。

【解答】

(1) 正方向への移動回数を R とすると

$$R \sim \text{Bin}\left(8, \frac{1}{2}\right), \quad X(8) = 2R - 8.$$

したがって

$$\Pr(X(8) = 2) = \Pr(R = 5) = \frac{{}_8C_5}{2^8} = \frac{7}{32}.$$

(2) 左右対称性より

$$\begin{aligned} E(|X(7)|) &= \frac{2}{2^7} \sum_{r=4}^7 (2r-7) {}_7C_r \\ &= \frac{2}{128} (35 + 63 + 35 + 7) = \frac{35}{16}. \end{aligned}$$

(3) 第 1 歩を正に固定する。原点へ戻らない経路数を、各時刻の正の位置ごとに更新すると

時刻	正の位置ごとの経路数			
1	1			
2	1			
3	1	1		
4	2	1		
5	2	3		1
6	5	4		1

となる。第 1 歩が正の経路は $5 + 4 + 1 = 10$ 通りである。負側も 10 通りだから

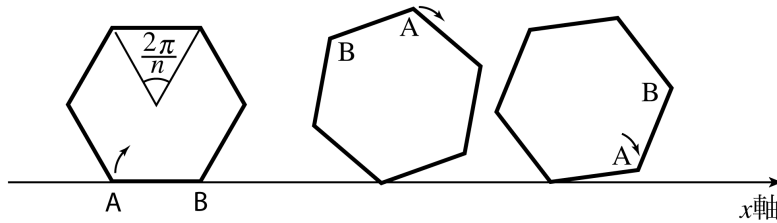
$$\frac{20}{2^6} = \frac{5}{16}$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 16～21 分。ランダムウォークの標準的な数え上げだが、(3) の条件を読み違えやすい。「6 回後に O でない」ではなく、1 回目から 6 回目まで一度も O に戻らないことを数える。期待値は分布を全部書いてもよいが、左右対称性で正の座標だけを 2 倍すると整理しやすい。経路数では、正方向の回数と座標 $2r - n$ の対応を常に確認するのがミス防止になる。

【第 5 問】

半径 1 の円に内接する正 n 角形が xy 平面上にある．ひとつの辺 AB が x 軸に含まれている状態から始めて，正 n 角形を図のように x 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が x 軸に含まれる状態まで続ける．点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする．

図は $n=6$ の場合

- (1) $L(6)$ を求めよ．
(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(n)$$

を求めよ．

▶ 解法 1

【方針】

正 n 角形が 1 辺ずつ転がるたびに，接している頂点を中心として角 $2\pi/n$ だけ回転する．この間，点 A はその接点を中心とする円弧を描く．接点が A から j 個先の頂点であるとき，円弧の半径は半径 1 の外接円の弦長 $2\sin(j\pi/n)$ である．したがって全長は弧長の和

$$(2\pi/n) \sum_{j=1}^{n-1} 2\sin(j\pi/n)$$

になる．(1) は直接和を計算し，(2) は三角和公式または区分求積で極限を求める．

【解答】

正 n 角形がすべらずに 1 辺分転がる時，その瞬間に x 軸上にある頂点を中心として，図形は外角 $\frac{2\pi}{n}$ だけ回転する．この間，点 A はその接点を中心とする円弧を描く．

接点が A から数えて j 個先の頂点であるとき，接点から A までの距離は，半径 1 の円に内接する正 n 角形の弦長なので $2\sin \frac{j\pi}{n}$ である．再び点 A が x 軸上にくるまで， $j = 1, 2, \dots, n-1$ の円弧が現れる．

したがって，軌跡の長さは

$$L(n) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{2\pi}{n} \cdot 2\sin \frac{j\pi}{n} = \frac{4\pi}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n}$$

である．

(1) $n = 6$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^5 \sin \frac{j\pi}{6} &= \sin \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

よって $L(6) = \frac{4\pi}{6}(2 + \sqrt{3}) = \frac{2\pi(2 + \sqrt{3})}{3}$ である．

(2)

三角関数の和の公式を用いると

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} = \frac{\sin \frac{(n-1)\pi}{2n} \sin \frac{n\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} = \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

である。したがって $L(n) = \frac{4\pi}{n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$ である。

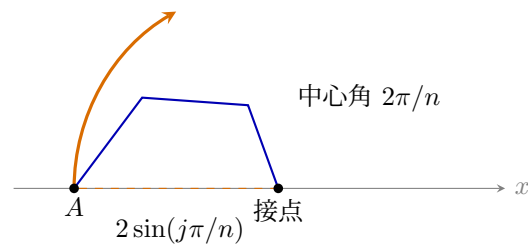
ここで

$$\frac{\pi}{2n} \rightarrow 0, \quad \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \rightarrow 1, \quad \cos \frac{\pi}{2n} \rightarrow 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{n} \cdot \frac{\cos \frac{\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{n} \cdot \frac{2n}{\pi} \\ &= 8. \end{aligned}$$

【接点を中心とする円弧】



▶ 解法 2

【方針】

各転倒で点 A が描く円弧の中心角は $2\pi/n$ 、半径は接点までの弦長 $2\sin(j\pi/n)$ である。(1) は $n=6$ の 5 本の弦長を直接足す。(2) は弧長和を $\sin(\pi x)$ の区分求積として評価する。

【解答】

各転倒で点 A が描く円弧の長さは

$$\frac{2\pi}{n} \cdot 2\sin \frac{j\pi}{n} \quad (j=1, \dots, n-1)$$

である。したがって

$$L(n) = 4\pi \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{j\pi}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

(1)

$$\begin{aligned} L(6) &= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{2\pi(2 + \sqrt{3})}{3}. \end{aligned}$$

(2) 右辺は $[0, 1]$ 上の $\sin(\pi x)$ の区分求積だから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L(n) &= 4\pi \int_0^1 \sin(\pi x) dx \\ &= 4\pi \cdot \frac{2}{\pi} = 8. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 22～28 分。転がり運動を、各接点を中心とする円弧の和に翻訳できるかが核心である。円弧の中心角は常に外角 $2\pi/n$ だが、半径は一定ではなく、 A から接点までの弦長 $2\sin(j\pi/n)$ になる。ここを一辺の長さだけで処理すると誤答になる。(2) は三角和公式で正確に求めても、区分求積で極限だけを取ってもよい。