

# 入 学 試 験 問 題



## 数 学

北 海 道 大 学 2004 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

### 注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

## 第 1 問

$n$  を自然数とする. 等式  $\sin x = e^{\frac{x}{n}} - 1$  を満たす  $0$  以上の実数  $x$  の個数を  $P_n$  で表す. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n}$$

を求めよ. ただし,  $e$  は自然対数の底とする.

## 第 2 問

$D$  を  $0 \leq x < y$  を満たす整数の組  $(x, y)$  のなす集合とする.  $x = 0$  である  $D$  の要素  $(0, y)$  を「レベル 0 である」という. 次の操作 G を考える.

**操作 G:** レベル 0 でない  $D$  の要素  $(x, y)$  から新たな  $D$  の要素  $(x', y')$  を作る. ここで  $x'$  は  $y$  を  $x$  で割った余りであり,  $y'$  は  $x$  である.

この操作を  $(x, y)$  に  $n$  回繰り返してレベル 0 になるとき,  $(x, y)$  は「レベル  $n$  である」という. 0 以上の  $n$  に対して, レベル  $n$  の  $D$  の要素  $(x, y)$  のうち,  $y$  が最小になるものを「レベル  $n$  の最小組」という.

- (1)  $n = 0, 1, 2$  について, レベル  $n$  の最小組をすべて求めよ. それらが操作 G の繰り返しで, どのようにレベル 0 になるかを書け.
- (2) 操作 G を 1 回行うことにより  $(a, b)$  が得られるような  $D$  の要素をすべて求めよ.
- (3)  $n \geq 1$  とする.  $(a, b)$  をレベル  $n$  の最小組とする.  $(x, y)$  をレベル  $n$  の組とすれば,  $a \leq x$  となることを  $n$  についての数学的帰納法を用いて示せ.
- (4) (3) により, 各  $n \geq 1$  に対し, レベル  $n$  の最小組がただ 1 つ定まることがわかる. この組を  $(a_n, b_n)$  と表すとき,  $b_{n+1} = a_n + b_n$ ,  $a_{n+1} = b_n$  であることを示せ.

### 第 3 問

$x = \sqrt{\cos 2t} \cos t$ ,  $y = \sqrt{\cos 2t} \sin t$   $\left(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right)$  と媒介変数  $t$  で表される曲線を  $C$  とする.

- (1) 曲線  $C$  上の点  $(x, y)$  における  $y$  の最大値と, そのときの  $x$  を求めよ.
- (2) 曲線  $C$  で囲まれた図形の面積を求めよ.

## 第 4 問

$|z| = 1$  である複素数  $z$  に対して,  $z, z^2, \frac{1}{z}$  が定める複素数平面上の 3 点を考える. ただし,  $z$  の偏角  $\theta$  は  $0 \leq \theta \leq \pi$  の範囲とする.

- (1) 3 点の内の 2 点以上が一致するときの  $\theta$  をすべて求めよ.
- (2) (1) 以外の人に, 3 点を頂点とする三角形の面積  $S$  を,  $\theta$  を用いて表せ.
- (3)  $S$  が極大値をとるときの  $\cos \theta$  の値をすべて求めよ.
- (4)  $S$  の最大値と, そのときの複素数  $z$  を求めよ.

# 計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)