

北海道大学 2004 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n を自然数とする. 等式 $\sin x = e^{x/n} - 1$ を満たす 0 以上の実数 x の個数を P_n で表す. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n}$$

を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

【方針】

右辺 $e^{x/n} - 1$ は単調増加し, 1 を超えると $\sin x$ と等しくなれないため, 解は $0 \leq x \leq n \log 2$ に限られる. また右辺が非負なので, $\sin x \geq 0$ となる半周期だけを数えればよい. 各半周期 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ では, 差 $\sin x - (e^{x/n} - 1)$ が上に凸でなく下に曲がる関数になり, 零点は高々 2 個である. 中央で正になる半周期は 2 個の解を与え, 端の不完全な半周期の個数誤差は n で割ると消える. この上下評価で極限を求める.

【解答】

方程式を $\sin x = e^{x/n} - 1$ と書く. 右辺は $x \geq 0$ で単調増加し, かつ非負である. $\sin x \leq 1$ なので, 解が存在するには $e^{x/n} - 1 \leq 1$ が必要である. したがって $x \leq n \log 2$ である. また右辺は非負だから, 解は $\sin x \geq 0$ となる範囲に限られる. $\sin x \geq 0$ となる半周期は $I_k = [2k\pi, (2k+1)\pi]$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) である. 各 I_k で $f_n(x) = \sin x - (e^{x/n} - 1)$ とおくと, $f_n''(x) = -\sin x - \frac{1}{n^2}e^{x/n} < 0$ である. したがって $f_n(x)$ は各 I_k で上に凸ではなく, グラフは下向きに曲がる. このため, 各 I_k における零点は高々 2 個である.

一方, I_k の中央 $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ で

$$f_n\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \left(e^{(2k\pi + \pi/2)/n} - 1\right) = 2 - e^{(2k\pi + \pi/2)/n}$$

である. したがって $2k\pi + \frac{\pi}{2} < n \log 2$ なら, この中央で $f_n > 0$ となる. 区間の両端では $\sin x = 0$ であり, 右辺は非負なので $f_n \leq 0$ である. よってこのような半周期は 2 個の解を与える. ただし $k = 0$ では左端 $x = 0$ も解であり, それを含めて 2 個と数える.

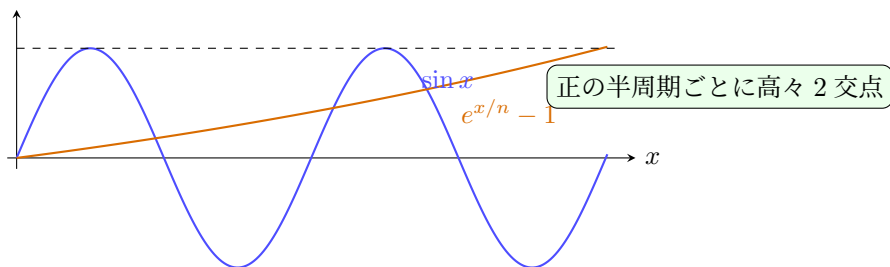
ここで, 中央が $n \log 2$ より左にある半周期の個数を L_n , 左端が $n \log 2$ 以下にある半周期の個数を U_n とする. 上の議論から $2L_n \leq P_n \leq 2U_n$ である. これらの個数は長さ 2π ごとに 1 つ現れるので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{n} = \frac{\log 2}{2\pi}$$

である. したがって, はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{n} = 2 \cdot \frac{\log 2}{2\pi} = \frac{\log 2}{\pi}$$

である.



【総評】 解の正確な個数そのものより, 周期ごとの解の数を評価して極限を出す問題で, 目安時間は 25 分程度. まず $x \leq n \log 2$ で打ち切れること, 次に $\sin x \geq 0$ の半周期だけを見ればよいことが出発点である. 各半周期で解が高々 2 個である理由として, $f_n''(x) < 0$ を使うと論証が締まる. 境界付近の半周期では解の個数がずれる可能性があるが, そのずれは高々定数個なので, n で割った極限には影響しない.

【第 2 問】

D を $0 \leq x < y$ を満たす整数の組 (x, y) のなす集合とする. $x = 0$ である D の要素 $(0, y)$ を「レベル 0 である」という. 次の操作 G を考える.

操作 G : レベル 0 でない D の要素 (x, y) から新たな D の要素 (x', y') を作る. ここで x' は y を x で割った余りであり, y' は x である.

この操作を (x, y) に n 回繰り返してレベル 0 になるとき, (x, y) は「レベル n である」という. 0 以上の n に対して, レベル n の D の要素 (x, y) のうち, y が最小になるものを「レベル n の最小組」という.

- (1) $n = 0, 1, 2$ について, レベル n の最小組をすべて求めよ. それらが操作 G の繰り返しで, どのようにレベル 0 になるかを書け.
- (2) 操作 G を 1 回行うことにより (a, b) が得られるような D の要素をすべて求めよ.
- (3) $n \geq 1$ とする. (a, b) をレベル n の最小組とする. (x, y) をレベル n の組とすれば, $a \leq x$ となることを n についての数学的帰納法を用いて示せ.
- (4) (3) により, 各 $n \geq 1$ に対し, レベル n の最小組がただ 1 つ定まることがわかる. この組を (a_n, b_n) と表すとき, $b_{n+1} = a_n + b_n$, $a_{n+1} = b_n$ であることを示せ.

【方針】

操作 G はユークリッドの互除法であり, 1 回前の組は割り算の商を使って $(b, qb + a)$ と表せる. (1) は低いレベルを直接たどり, (2) で一般の逆像を求める. (3) は数学的帰納法で, レベル n の最小組 (a_n, b_n) からレベル $n+1$ の候補 $(b_n, a_n + b_n)$ を作る. 任意のレベル $n+1$ の組は, 1 回操作するとレベル n の組になるので, その第 2 成分が b_n 以上であることから第 1 成分の下限が出る. (4) はこの最小候補が実際に最小であることを確認して, フィボナッチ型の漸化式を得る.

【解答】

(1) レベル 0 では $x = 0$ だから, y が最小の組は $(0, 1)$ である.

レベル 1 の組は 1 回で $(0, x)$ へ移る. 余りが 0 となる必要があり, $0 < x < y$ のもとで y が最小なのは

$$(1, 2) \longrightarrow (0, 1)$$

である.

レベル 2 では, 1 回でレベル 1 の最小組へ移る最小候補を調べる. $(2, 3)$ に操作 G を行くと $(1, 2)$ になるので,

$$(2, 3) \longrightarrow (1, 2) \longrightarrow (0, 1)$$

である. したがってレベル 0, 1, 2 の最小組は

$$(0, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 3)$$

である.

(2) (x, y) に操作 G を行って (a, b) が得られるとする. 定義から $x = b$ であり, y を b で割った余りが a だから,

$$y = qb + a$$

と表せる. したがって逆像は

$$(b, qb + a)$$

である. $a > 0$ なら $q = 1, 2, \dots$, $a = 0$ なら $y > b$ のため $q = 2, 3, \dots$ である.

(3) n について数学的帰納法を用いる. $n = 1$ では最小組は $(1, 2)$ であり, 任意のレベル 1 の組は第 1 成分が正の整数だから $1 \leq x$ である.

レベル n で主張が成り立つと仮定し, その最小組を (a_n, b_n) とする. 任意のレベル $n+1$ の組 (x, y) に操作 G を 1 回行い,

$$(x, y) \longrightarrow (r, x)$$

となったとする. (r, x) はレベル n の組である. 帰納法の仮定から

$$a_n \leq r$$

であり、最小組の定義から第 2 成分について

$$b_n \leq x$$

である。また (2) より $y = qx + r$ で $q \geq 1$ だから、

$$y \geq x + r \geq a_n + b_n.$$

一方、

$$(b_n, a_n + b_n) \longrightarrow (a_n, b_n)$$

であるから、 $(b_n, a_n + b_n)$ は実際にレベル $n+1$ であり、上の下限を達成する。よってこれがレベル $n+1$ の最小組で、その第 1 成分は b_n である。さらに任意のレベル $n+1$ の組では $b_n \leq x$ だから、帰納法の主張も成立する。

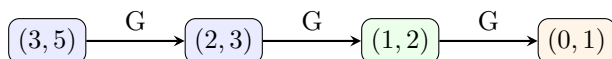
(4) (3) の帰納段階で、レベル $n+1$ の最小組が

$$(b_n, a_n + b_n)$$

であることまで示した。したがって

$$a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n$$

である。



逆向きの最小列はフィボナッチ型

【総評】 互除法を逆向きにたどる証明問題で、目安時間は 28 分程度。(2) の逆像表示 $(b, qb + a)$ が全体の核で、 $a = 0$ のときだけ $q \geq 2$ になる点にも注意する。(3) は「最小組は y が最小」という定義から、第 2 成分の下限を使って第 1 成分の下限を出すのがポイントである。(4) の漸化式はフィボナッチ型で、低いレベルの $(1, 2), (2, 3)$ と整合しているか確認するとよい。

【第 3 問】

$x = \sqrt{\cos 2t} \cos t$, $y = \sqrt{\cos 2t} \sin t$ $\left(-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}\right)$ と媒介変数 t で表される曲線を C とする。

- (1) 曲線 C 上の点 (x, y) における y の最大値と、そのときの x を求めよ。
- (2) 曲線 C で囲まれた図形の面積を求めよ。

【方針】

与えられた式は極座標 $r = \sqrt{\cos 2t}$ 、偏角 t を表している。 $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ では $\cos 2t \geq 0$ なので、右側の 1 つのループを考えればよい。(1) は $y^2 = (\cos 2t) \sin^2 t$ とし、 $u = \sin^2 t$ によって 2 次式の最大問題へ直す。(2) は極座標の面積公式

$$\frac{1}{2} \int r^2 dt$$

を用いて計算する。

【解答】

(1) 与えられた媒介変数表示は $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $r = \sqrt{\cos 2t}$ と見られる。つまり極座標で $r^2 = \cos 2t$ と表される曲線である。範囲 $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ では $\cos 2t \geq 0$ である。 y の最大値を求めるため、まず y^2 を考える。 $y^2 = (\cos 2t) \sin^2 t$ である。ここで $u = \sin^2 t$ とおくと、 $-\pi/4 \leq t \leq \pi/4$ より $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$ である。また $\cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t = 1 - 2u$ なので、 $y^2 = (1 - 2u)u = u - 2u^2$ である。この 2 次式は $u = \frac{1}{4}$ のとき最大となり、その最大値は $\frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$ である。したがって $y_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ である。

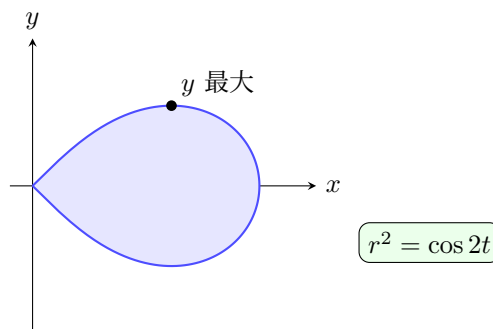
このとき $\sin^2 t = 1/4$ であり、 y が最大になるには $\sin t > 0$ なので $t > 0$ である。したがって $\sin t = \frac{1}{2}$, $\cos t = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2t = \frac{1}{2}$ である。よって $x = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

(2) 極座標で表された曲線の面積は

$$\frac{1}{2} \int r^2 dt$$

で求められる。ここでは $r^2 = \cos 2t$ だから、曲線で囲まれた図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2t \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{4} \{1 - (-1)\} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



【総評】 極座標表示に気づけるかを問う問題で、目安時間は 16 分程度。 $r^2 = \cos 2t$ と読めば、(2) は面積公式でほぼ終わる。(1) では y ではなく y^2 を最大化し、 $u = \sin^2 t$ と置くと 2 次式になる。 y の最大値なので $t > 0$ 側を選び、対応する x を正で答える点に注意する。

【第 4 問】

$|z| = 1$ である複素数 z に対して、 $z, z^2, \frac{1}{z}$ が定める複素数平面上の 3 点を考える。ただし、 z の偏角 θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲とする。

- (1) 3 点の内の 2 点以上が一致するときの θ をすべて求めよ。
- (2) (1) 以外の場合に、3 点を頂点とする三角形の面積 S を、 θ を用いて表せ。
- (3) S が極大値をとるときの $\cos \theta$ の値をすべて求めよ。
- (4) S の最大値と、そのときの複素数 z を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$z = e^{i\theta}$ とおくと、3 点は偏角 $\theta, 2\theta, -\theta$ をもつ単位円上の点である。(1) はこれらの偏角が 2π の整数倍だけ異なる場合を列挙する。(2) は 2 点 z と $1/z$ が同じ x 座標をもつことを利用し、縦の長さ $2\sin \theta$ と、点 z^2 からその縦線までの距離で面積を出す。(3) は $u = \cos \theta$ と置き、 $S^2 = (1-u^2)(1-u)^2(2u+1)^2$ の極値を調べる。退化点で区切られた各区間の内部で極大候補を求め、(4) では 2 つの候補の値を比較して最大を選ぶ。

【解答】

(1) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおく。 $|z| = 1$ なので z^2 の偏角は 2θ 、 $\frac{1}{z}$ の偏角は $-\theta$ である。したがって 3 点は、単位円上の偏角 $\theta, 2\theta, -\theta$ の点である。

2 点以上が一致するのは、これらの偏角の差が 2π の整数倍になるときである。 $z = z^2 \iff \theta \equiv 2\theta \pmod{2\pi}$ より $\theta = 0$ である。また $z = \frac{1}{z} \iff 2\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ より、 $0 \leq \theta \leq \pi$ では $\theta = 0, \pi$ である。さらに $z^2 = \frac{1}{z} \iff 3\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ より、 $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}$ である。以上を合わせると $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \pi$ である。

(2) (1) 以外の場合を考える。3 点の座標は $z : (\cos \theta, \sin \theta), z^2 : (\cos 2\theta, \sin 2\theta), \frac{1}{z} : (\cos \theta, -\sin \theta)$ である。点 z と $1/z$

を結ぶ線分は縦の線分で、その長さは $2 \sin \theta$ である。点 z^2 から直線 $x = \cos \theta$ までの距離は $|\cos 2\theta - \cos \theta|$ である。したがって三角形の面積 S は $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \theta \cdot |\cos 2\theta - \cos \theta|$ である。

ここで $u = \cos \theta$ とおくと、 $\cos 2\theta - \cos \theta = 2u^2 - u - 1 = (u-1)(2u+1)$ である。 $0 < \theta < \pi$ では $\sin \theta > 0$ 、また $1-u \geq 0$ なので、 $S = \sin \theta(1-\cos \theta)|2 \cos \theta + 1|$ である。

(3) $u = \cos \theta$ とおく。退化する場合を除けば $-1 < u < 1$ 、 $u \neq -\frac{1}{2}$ である。(2) より $S^2 = (1-u^2)(1-u)^2(2u+1)^2$ である。 $S > 0$ の範囲で微分の符号を見るため、対数微分を用いると

$$\frac{d}{du} \log S^2 = -\frac{2u}{1-u^2} - \frac{2}{1-u} + \frac{4}{2u+1}$$

である。これが 0 となる条件を整理すると $6u^2 + 4u - 1 = 0$ である。したがって $u = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{6}$ である。 S は区間 $(-1, -1/2)$ と $(-1/2, 1)$ の端で 0 となり、それぞれの区間で上の解を 1 つずつもつ。よって、 S が極大値をとるとき $\cos \theta$ は $\cos \theta = \frac{-2 - \sqrt{10}}{6}$, $\frac{-2 + \sqrt{10}}{6}$ である。

(4) (3) の 2 つの候補で値を比較する。 $u = \cos \theta$ として $S^2 = (1-u^2)(1-u)^2(2u+1)^2$ に代入すると、 $u = \frac{-2 + \sqrt{10}}{6}$ のとき $S^2 = \frac{2437 + 340\sqrt{10}}{2916}$ であり、 $u = \frac{-2 - \sqrt{10}}{6}$ のとき $S^2 = \frac{2437 - 340\sqrt{10}}{2916}$ である。したがって最大値を与えるのは $\cos \theta = \frac{\sqrt{10} - 2}{6}$ のときである。

このとき $0 \leq \theta \leq \pi$ なので $\sin \theta \geq 0$ であり、

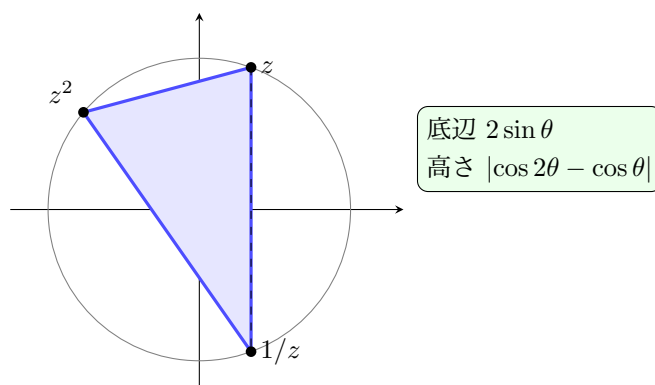
$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10} - 2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{10}}{18}}$$

である。また最大値は

$$S_{\max} = \sqrt{\frac{2437 + 340\sqrt{10}}{2916}} = \frac{\sqrt{2437 + 340\sqrt{10}}}{54}$$

である。

したがって、そのときの複素数 z は $z = \frac{\sqrt{10} - 2}{6} + i\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{10}}{18}}$ であり、最大値は $\frac{\sqrt{2437 + 340\sqrt{10}}}{54}$ である。



▶ 解法 2

【方針】

3 点の座標を行列式へ入れて面積を三角関数の式にする。 $u = \cos \theta$ と置いた後は、面積の 2 乗を多項式として微分し、退化点で分かれる二つの区間の極大値を比較する。

【解答】

(1) 3 点の偏角は $\theta, 2\theta, -\theta$ である。差が 2π の整数倍となる場合を調べると、

$$\theta = 0, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi$$

である。

(2) 3 点の座標を三角形の面積の行列式へ入れると、

$$S = \frac{1}{2} |\sin 2\theta + \sin \theta - \sin 3\theta|.$$

加法定理で整理すれば、

$$S = \sin \theta (1 - \cos \theta) |2 \cos \theta + 1|$$

となる。

(3) $u = \cos \theta$ とおくと、

$$S^2 = (1 - u^2)(1 - u)^2(2u + 1)^2 =: G(u).$$

直接微分して因数分解すると、

$$G'(u) = -2(u - 1)^2(2u + 1)(6u^2 + 4u - 1).$$

退化点 $u = -1, -\frac{1}{2}, 1$ を除いた二つの区間で極大となる候補は

$$u = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{6}$$

である。

(4) 二候補を $G(u)$ へ代入すると、

$$G\left(\frac{-2 \pm \sqrt{10}}{6}\right) = \frac{2437 \pm 340\sqrt{10}}{2916}.$$

したがって最大値を与えるのは

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{10} - 2}{6}$$

のときである。 $0 \leq \theta \leq \pi$ より正の虚部を選び、

$$z = \frac{\sqrt{10} - 2}{6} + i\sqrt{\frac{11 + 2\sqrt{10}}{18}}, \quad S_{\max} = \frac{\sqrt{2437 + 340\sqrt{10}}}{54}$$

を得る。

【総評】 単位円上の 3 点を作る三角形の面積を、三角関数と 1 変数の極値へ落とす難問で、目安時間は 30 分程度。(1) の退化角 $0, 2\pi/3, \pi$ を先に除外しないと、(2) 以降の絶対値や対数微分で混乱しやすい。面積は縦の底辺 $2\sin \theta$ と横距離 $|\cos 2\theta - \cos \theta|$ で出すと短い。(3) では 2 つの区間にそれぞれ極大候補があり、(4) で大きい方を比較して選ぶ。