

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2004 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の漸化式で定義される複素数の数列 $z_1 = 1$, $z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) を考える. ただし, i は虚数単位である.

(1) z_2 , z_3 を求めよ.

(2) 上の漸化式を $z_{n+1} - \alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \alpha)$ と表したとき, 複素数 α を求めよ.

(3) 一般項 z_n を求めよ.

(4) $z_n = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ.

第 2 問

A を 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (ただし, $bc \neq 0$), k を実数とする. 行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ について等式 $XA - AX = kA \cdots \cdots (*)$ を考える. ただし, 行列の成分は, すべて実数とする.

- (1) $k = 0$ のとき, $(*)$ を満たす X は A の実数倍であることを示せ.
- (2) $k \neq 0$ のとき, $(*)$ を満たす X が存在するための必要十分条件は $A^2 = O$ (ただし, O は零行列) であることを示せ. このとき, $(*)$ を満たす X で $z = c$ であるものを求めよ.

第 3 問

a を 1 以上の実数, b を正の実数とする.

(1) 0 以上のすべての実数 x について, 不等式 $e^x - a(x + 2b) \geq 0$ が成り立つための, a , b の満たすべき条件を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

(2) a , b が (1) で求めた範囲を動くとき, 定積分

$$\frac{1}{ae^b} \int_0^1 \frac{1}{x + 2b} dx$$

の値を最小にする a , b と, その最小値を求めよ.

第 4 問

a, b を正の実数とする. 空間内の 2 点 $A(0, a, 0)$, $B(1, 0, b)$ を通る直線を l とする. 直線 l を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする.

- (1) x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めよ.
- (2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ.
- (3) 図形 M と 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ.

第 5 問

ある人がサイコロを振る試行によって、部屋 A , B を移動する. サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る. また各試行の結果, 部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え, 部屋 B に居る場合は 1 点を減らす. 持ち点は負になることもあるとする. 第 n 試行の結果, 部屋 A , B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$, $P_B(n)$ と表す. 最初にその人は部屋 A に居るものとし (つまり, $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$ とする), 持ち点は 1 とする.

- (1) $P_A(1)$, $P_A(2)$, $P_A(3)$ および $P_B(1)$, $P_B(2)$, $P_B(3)$ を求めよ. また, 第 3 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ.
- (2) $P_A(n+1)$, $P_B(n+1)$ を $P_A(n)$, $P_B(n)$ を用いて表せ.
- (3) $P_A(n)$, $P_B(n)$ を n を用いて表せ.
- (4) 第 n 試行の結果, その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)