

北海道大学 2004 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の漸化式で定義される複素数の数列 $z_1 = 1, z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) を考える. ただし, i は虚数単位である.

- (1) z_2, z_3 を求めよ.
- (2) 上の漸化式を $z_{n+1} - \alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \alpha)$ と表したとき, 複素数 α を求めよ.
- (3) 一般項 z_n を求めよ.
- (4) $z_n = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 n をすべて求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

係数 $\lambda = (1+i\sqrt{3})/2$ は絶対値 1、偏角 $\pi/3$ の複素数である. まず固定点 α を求めて $z_{n+1} - \alpha = \lambda(z_n - \alpha)$ の等比型に直す. 一般項では $1 - \lambda = \lambda^{-1}$ を使って指数を整理し、最後は $\lambda^6 = 1, \lambda^3 = -1$ という周期で n を分類する.

【解答】

(1) $\lambda = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ とおく. すると漸化式は $z_{n+1} = \lambda z_n + 1$ である. $z_1 = 1$ より $z_2 = \lambda + 1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ である. また

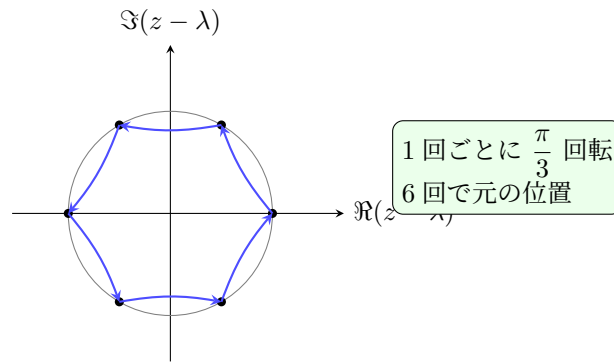
$$\begin{aligned} z_3 &= \lambda z_2 + 1 \\ &= \lambda(1 + \lambda) + 1 \\ &= 1 + \lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

である. ここで $\lambda + \lambda^2 = i\sqrt{3}$ だから $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ である.

(2) $z_{n+1} - \alpha = \lambda(z_n - \alpha)$ と表せるとすると、 $z_{n+1} = \lambda z_n + (1 - \lambda)\alpha$ である. もとの漸化式 $z_{n+1} = \lambda z_n + 1$ と比べると、 $(1 - \lambda)\alpha = 1$ である. したがって $\alpha = \frac{1}{1 - \lambda}$ である. 実際に $1 - \lambda = 1 - \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ なので、 $\alpha = \frac{1}{(1-i\sqrt{3})/2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ である. よって $\alpha = \lambda$ である.

(3) (2) より $z_{n+1} - \lambda = \lambda(z_n - \lambda)$ である. したがって $z_n - \lambda = \lambda^{n-1}(z_1 - \lambda)$ である. ここで $z_1 - \lambda = 1 - \lambda = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \lambda^{-1}$ だから、 $z_n - \lambda = \lambda^{n-1}\lambda^{-1} = \lambda^{n-2}$ である. よって $z_n = \lambda + \lambda^{n-2}$ であり、すなわち $z_n = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2}$ である.

(4) 求める条件は $z_n = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ である. 右辺は $-\lambda^{-1}$ であるから、(3) の式を用いると $\lambda + \lambda^{n-2} = -\lambda^{-1}$ である. したがって $\lambda^{n-2} = -(\lambda + \lambda^{-1})$ である. $\lambda = e^{i\pi/3}$ なので $\lambda + \lambda^{-1} = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$ である. よって $\lambda^{n-2} = -1$ である. λ は偏角 $\pi/3$ の複素数なので $\lambda^3 = -1, \lambda^6 = 1$ である. したがって $n - 2 \equiv 3 \pmod{6}$ であり、 $n \equiv 5 \pmod{6}$ である. 求める自然数は $n = 6m + 5$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) である.



▶ 解法 2

【方針】

係数を単位複素数 λ とおき、漸化式を複素数平面上的回転として読む。中心は固定点の条件で決まり、中心から見た初期ベクトルを毎回 60 度回すことで一般項と到達時刻を求める。

【解答】

(1)

$$\lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

とおく。直接代入して

$$z_2 = 1 + \lambda = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_3 = 1 + \lambda + \lambda^2 = 1 + i\sqrt{3}$$

である。

(2) 変換 $z \mapsto \lambda z + 1$ の固定点を α とすると、

$$\alpha = \lambda\alpha + 1.$$

したがって

$$\alpha = \frac{1}{1 - \lambda} = \lambda$$

である。

(3) 固定点 λ を中心に見ると

$$z_{n+1} - \lambda = \lambda(z_n - \lambda).$$

$|\lambda| = 1$ 、 $\arg \lambda = \pi/3$ なので、中心からのベクトルは 1 回ごとに $\pi/3$ 回転する。初期ベクトルは

$$z_1 - \lambda = 1 - \lambda = \lambda^{-1}$$

だから、

$$z_n - \lambda = \lambda^{n-1} \lambda^{-1} = \lambda^{n-2}.$$

よって

$$z_n = \lambda + \lambda^{n-2}$$

である。

(4) 目標値は $-\lambda^{-1}$ なので、

$$\lambda + \lambda^{n-2} = -\lambda^{-1}$$

より $\lambda^{n-2} = -1 = \lambda^3$ を得る。 $\lambda^6 = 1$ だから

$$n \equiv 5 \pmod{6}.$$

したがって

$$n = 6m + 5 \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

である。

【総評】 複素数の一次漸化式を固定点で等比化する基本問題で、目安時間は 18 分程度。 $\lambda = (1 + i\sqrt{3})/2$ が 6 乗して 1 になることを見抜くと、(4) は周期の問題になる。一般項 $z_n = \lambda + \lambda^{n-2}$ の指数がずれやすいので、 $n = 1$ を代入して確認するとよい。別解の回転の見方は、式変形だけでなく複素数平面上的動きも把握できる。

【第 2 問】

A を 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ (ただし, $bc \neq 0$), k を実数とする. 行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ について等式 $XA - AX = kA$ ……(*) を考える. ただし, 行列の成分は, すべて実数とする.

- (1) $k = 0$ のとき, (*) を満たす X は A の実数倍であることを示せ.
 (2) $k \neq 0$ のとき, (*) を満たす X が存在するための必要十分条件は $A^2 = O$ (ただし, O は零行列) であることを示せ. このとき, (*) を満たす X で $z = c$ であるものを求めよ.

【方針】

まず $XA - AX$ を成分計算し, x, y, z に関する 3 本の一次方程式にする. (1) では $k = 0$ としてその解空間を調べ, $bc \neq 0$ を使って x, y, z が同じ実数倍でしろうことを示す. (2) では 3 本の式をうまく足し合わせて $k(a^2 + bc) = 0$ を導き, $k \neq 0$ から $a^2 + bc = 0$, すなわち $A^2 = O$ を得る. 逆向きでは $A^2 = O$ を仮定し, 指定された $z = c$ から x, y を順に決めて, 残りの式も満たすことを確認する.

【解答】

(1) 成分を計算すると、

$$XA - AX = \begin{pmatrix} -bz + cy & -2ay + 2bx \\ 2az - 2cx & bz - cy \end{pmatrix}.$$

したがって $XA - AX = kA$ は

$$\begin{cases} -bz + cy = ka, \\ -2ay + 2bx = kb, \\ 2az - 2cx = kc \end{cases} \quad (*)$$

と同値である。

$k = 0$ とする. 第 1 式から $cy = bz$ である. $bc \neq 0$ なので $y = tb$ とおけば $z = tc$ となる. 第 2 式から $bx = ay = atb$ なので $x = ta$ である. よって

$$X = tA$$

であり, 条件を満たす X は A の実数倍である。

(2) まず $k \neq 0$ で解 X が存在すると仮定する. 式 (*) の第 1 式に a 、第 2 式に $c/2$ 、第 3 式に $b/2$ を掛けて加える. 左辺は相殺され、右辺は

$$ka^2 + \frac{c}{2}kb + \frac{b}{2}kc = k(a^2 + bc)$$

となる. したがって $k(a^2 + bc) = 0$ であり, $k \neq 0$ より

$$a^2 + bc = 0.$$

一方、

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$$

だから、これは $A^2 = O$ と同値である。

逆に $A^2 = O$ 、すなわち $a^2 + bc = 0$ とする. $bc \neq 0$ から $a \neq 0$ である. $z = c$ と指定し、第 3 式へ代入すると

$$x = a - \frac{k}{2}.$$

これを第 2 式へ代入して

$$y = \frac{b(a - k)}{a} = \frac{a(k - a)}{c}$$

を得る. よって

$$X = \begin{pmatrix} a - \frac{k}{2} & \frac{a(k - a)}{c} \\ c & -a + \frac{k}{2} \end{pmatrix}.$$

$a^2 + bc = 0$ を用いて第 1 式も満たすことを確認できる. したがって $A^2 = O$ は必要十分条件であり、上の X が指定された解である。

$$XA - AX = kA$$

成分の 3 本の一次式

$$k(a^2 + bc) = 0$$

$$k \neq 0 \implies A^2 = O$$

【総評】 成分計算から必要十分条件を引き出す重めの行列問題で、目安時間は 25 分程度。最初に $XA - AX$ を正確に出せるかが大前提で、(2) では 3 本の式をそのまま解こうとせず、係数を掛けて足し $a^2 + bc$ を作るのが核心である。逆向きでは条件を示すだけでなく、実際に X を構成し、指定された $z = c$ を満たすことまで書く必要がある。

【第 3 問】

a を 1 以上の実数、 b を正の実数とする。

- (1) 0 以上のすべての実数 x について、不等式 $e^x - a(x + 2b) \geq 0$ が成り立つための、 a, b の満たすべき条件を求めよ。ただし、 e は自然対数の底とする。
 (2) a, b が (1) で求めた範囲を動くとき、定積分

$$\frac{1}{ae^b} \int_0^1 \frac{1}{x + 2b} dx$$

の値を最小にする a, b と、その最小値を求めよ。

【方針】

(1) は $e^x \geq a(x + 2b)$ を $a \leq e^x/(x + 2b)$ と見て、右辺の $x \geq 0$ における最小値を調べる。 $b < 1/2$ 、 $b = 1/2$ 、 $b > 1/2$ で最小点が変わり、さらに $a \geq 1$ との両立条件を確認する。(2) は積分値を a, b で明示し、固定した b では a が最大のときに最小になることを使う。残った b の関数は微分し、 $\log(1 + u) < u$ 型の基本不等式で単調減少を示して、端点 $b = 1/2$ を選ぶ。

【解答】

(1) 求める条件は、すべての $x \geq 0$ について $e^x - a(x + 2b) \geq 0$ が成り立つことである。 $b > 0$ なので $x + 2b > 0$ であり、これは $a \leq \frac{e^x}{x + 2b} \quad (x \geq 0)$ と同値である。そこで $\phi(x) = \frac{e^x}{x + 2b}$ とおく。微分すると $\phi'(x) = \frac{e^x(x + 2b) - e^x}{(x + 2b)^2} = \frac{e^x(x + 2b - 1)}{(x + 2b)^2}$ である。 $0 < b < 1/2$ のとき、 $x = 1 - 2b$ は正であり、 $\phi(x)$ は $0 \leq x < 1 - 2b$ で減少し、 $x > 1 - 2b$ で増

加する。したがって最小値は $\phi(1 - 2b) = \frac{e^{1-2b}}{1} = e^{1-2b}$ である。この場合の条件は $1 \leq a \leq e^{1-2b}$ である。 $b = 1/2$ のとき、 $\phi'(x) \geq 0$ で、最小値は $x = 0$ における $\phi(0) = 1$ である。したがって $a \geq 1$ と合わせて $a = 1$ である。 $b > 1/2$ のとき、 $x + 2b - 1 > 0$ が $x \geq 0$ で成り立つので、 $\phi(x)$ は $x \geq 0$ で増加する。最小値は $\phi(0) = \frac{1}{2b} < 1$ である。しかし $a \geq 1$ なので、 $a \leq 1/(2b)$ とは両立しない。

以上より、求める条件は $0 < b \leq \frac{1}{2}$, $1 \leq a \leq e^{1-2b}$ である。

(2) まず積分を計算する。

$$\int_0^1 \frac{1}{x + 2b} dx = [\log(x + 2b)]_0^1 = \log \frac{1 + 2b}{2b}$$

である。したがって考える値は $\frac{1}{ae^b} \log \frac{1 + 2b}{2b}$ である。

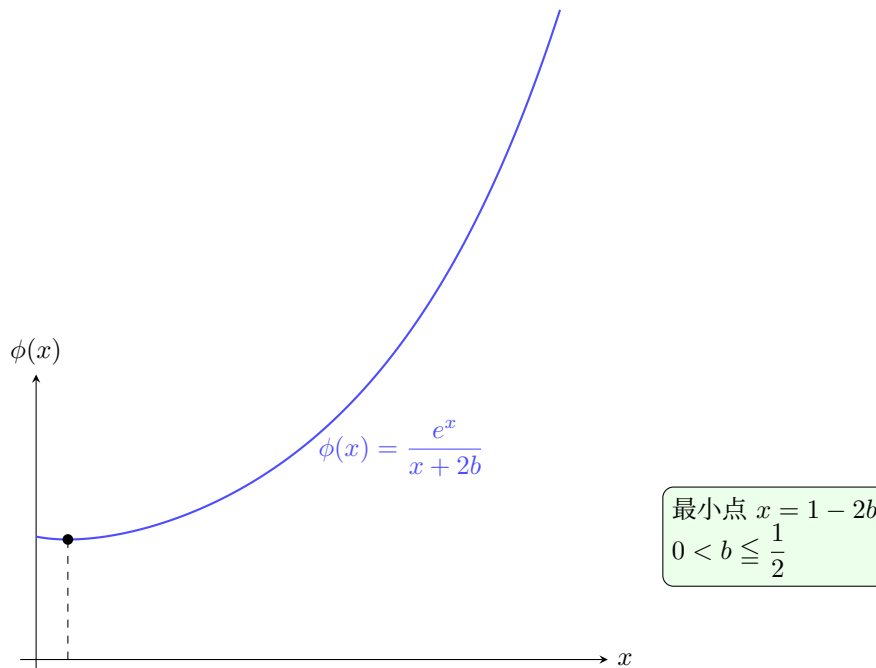
固定した b に対して、 $\log \frac{1 + 2b}{2b} > 0$ であり、値は a が大きいほど小さくなる。(1) より a の最大値は $a = e^{1-2b}$ である。

したがって、最小化すべき 1 変数関数は $H(b) = e^{b-1} \log \frac{1 + 2b}{2b} \quad \left(0 < b \leq \frac{1}{2}\right)$ である。

微分すると $H'(b) = e^{b-1} \left\{ \log \frac{1 + 2b}{2b} - \frac{1}{b(1 + 2b)} \right\}$ である。ここで $\log \frac{1 + 2b}{2b} = \log \left(1 + \frac{1}{2b}\right) < \frac{1}{2b}$ である。また $0 < b \leq 1/2$ より $\frac{1}{2b} \leq \frac{1}{b(1 + 2b)}$ である。したがって $\log \frac{1 + 2b}{2b} < \frac{1}{b(1 + 2b)}$ となり、 $H'(b) < 0$ である。

よって $H(b)$ は $0 < b \leq 1/2$ で減少する。したがって最小となるのは $b = \frac{1}{2}$ のときである。このとき $a = e^{1-2b} = 1$ であ

り、最小値は $\frac{1}{1 \cdot e^{1/2}} \log \frac{2}{1} = \frac{\log 2}{\sqrt{e}}$ である。



【総評】 指数関数の下からの評価条件と、その条件下での最小化を組み合わせた問題で、目安時間は 25 分程度。(1) は $e^x/(x + 2b)$ の最小値を調べるだけだが、 $b > 1/2$ が $a \geq 1$ と両立しない点を落としやすい。(2) は固定した b で a を最大にする判断が重要で、その後の b の単調性は不等式を添えて丁寧に示す必要がある。近似や展開に頼らず、微分と $\log(1 + u) < u$ で完結させるのが安定する。

【第 4 問】

a, b を正の実数とする．空間内の 2 点 $A(0, a, 0)$, $B(1, 0, b)$ を通る直線を l とする．直線 l を x 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を M とする．

- (1) x 座標の値が t であるような直線 l 上の点 P の座標を求めよ．
- (2) 図形 M と xy 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ．
- (3) 図形 M と 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ．

【方針】

直線 AB を A から B へ向かう媒介変数で表すと、 $x = t$ の点がすぐ求まる。回転のできる図形では、 $x = t$ における x 軸からの距離が回転半径になる。 xy 平面との交線では $z = 0$ として半径の 2 乗を y^2 に等しく置く。体積は $0 \leq x \leq 1$ の各断面が円板になるので、断面積 $\pi r(t)^2$ を積分する。

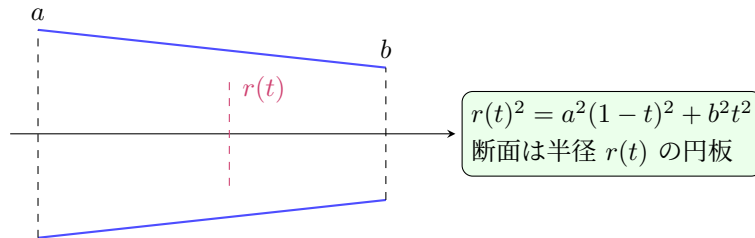
【解答】

(1) 点 $A(0, a, 0)$ から点 $B(1, 0, b)$ へ向かう直線上の点は、媒介変数 t を用いて $(1 - t)A + tB$ と表される。この点の x 座標は t であるから、求める点 P は $P(t) = (t, a(1 - t), bt)$ である。

(2) $x = t$ の位置で、直線 l 上の点 $P(t)$ と x 軸との距離の 2 乗は $\{a(1 - t)\}^2 + (bt)^2 = a^2(1 - t)^2 + b^2t^2$ である。直線を x 軸のまわりに回転すると、 $x = t$ の断面ではこの距離を半径とする円ができる。 xy 平面との交わりでは $z = 0$ であり、点 $(x, y, 0)$ が図形 M 上にあるには $y^2 = a^2(1 - x)^2 + b^2x^2$ を満たせばよい。したがって、求める図形の方程式は $y^2 = a^2(1 - x)^2 + b^2x^2$ である。

(3) $0 \leq x \leq 1$ における断面は、半径 $\sqrt{a^2(1 - x)^2 + b^2x^2}$ の円である。したがって求める体積 V は

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 \pi \{a^2(1 - x)^2 + b^2x^2\} dx \\
 &= \pi \left(a^2 \int_0^1 (1 - x)^2 dx + b^2 \int_0^1 x^2 dx \right) \\
 &= \pi \left(\frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} \right) \\
 &= \frac{\pi(a^2 + b^2)}{3}.
 \end{aligned}$$



【総評】 空間内の直線の回転体を断面積で処理する標準問題で、目安時間は 15 分程度。 $x = t$ の点を $(t, a(1-t), bt)$ と置ければ、半径の 2 乗はすぐ出る。 xy 平面との交線では y が正負両方を取るため y^2 の方程式で書く。体積は円すい台の公式に見えても半径が一次式ではないので、断面積を積分するのが安全である。

【第 5 問】

ある人がサイコロを振る試行によって、部屋 A , B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果、部屋 A に居る場合はその人の持ち点に 1 点を加え、部屋 B に居る場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果、部屋 A , B に居る確率をそれぞれ $P_A(n)$, $P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A に居るものとし (つまり, $P_A(0) = 1$, $P_B(0) = 0$ とする), 持ち点は 1 とする。

- (1) $P_A(1)$, $P_A(2)$, $P_A(3)$ および $P_B(1)$, $P_B(2)$, $P_B(3)$ を求めよ。また、第 3 試行の結果、その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。
- (2) $P_A(n+1)$, $P_B(n+1)$ を $P_A(n)$, $P_B(n)$ を用いて表せ。
- (3) $P_A(n)$, $P_B(n)$ を n を用いて表せ。
- (4) 第 n 試行の結果、その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

文系第 4 問と同じ 2 状態の移動で、移動確率は $1/3$ 、滞在確率は $2/3$ である。確率の漸化式は $P_A + P_B$ と $P_A - P_B$ に分けると一般項がすぐ出る。期待値は、初期持ち点 1 に、各試行後の得点増分の期待値 $P_A(k) - P_B(k)$ を足す。(4) はその等比級数を n まで和にする。

【解答】

(1) サイコロの目が 1, 3 のときだけ部屋を移るから、1 回の試行で部屋を移る確率は $\frac{1}{3}$ であり、移らない確率は $\frac{2}{3}$ である。初めは部屋 A にいるので、 $P_A(1) = \frac{2}{3}$, $P_B(1) = \frac{1}{3}$ である。

2 回目については

$$P_A(2) = \frac{2}{3}P_A(1) + \frac{1}{3}P_B(1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$$

であり、 $P_B(2) = \frac{4}{9}$ である。さらに $P_A(3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{14}{27}$ であり、 $P_B(3) = \frac{13}{27}$ である。

第 k 試行後の得点増分は、部屋 A にいれば $+1$ 、部屋 B にいれば -1 である。したがって、その期待値は $P_A(k) - P_B(k)$ である。初期持ち点は 1 なので、

$$\begin{aligned} E(3) &= 1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{9} - \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{14}{27} - \frac{13}{27}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \\ &= \frac{40}{27}. \end{aligned}$$

(2) 第 $n+1$ 試行後に部屋 A にいるのは、第 n 試行後に A にいて移らない場合と、第 n 試行後に B にいて移る場合である。したがって $P_A(n+1) = \frac{2}{3}P_A(n) + \frac{1}{3}P_B(n)$ である。同様に $P_B(n+1) = \frac{1}{3}P_A(n) + \frac{2}{3}P_B(n)$ である。

(3) (2) の 2 式を引くと $P_A(n+1) - P_B(n+1) = \frac{1}{3}\{P_A(n) - P_B(n)\}$ である。 $P_A(0) - P_B(0) = 1$ だから $P_A(n) - P_B(n) =$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。また $P_A(n) + P_B(n) = 1$ なので、

$$P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right), \quad P_B(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

である。

(4) 第 k 試行後の得点増分の期待値は $P_A(k) - P_B(k) = \frac{1}{3^k}$ である。初期持ち点は 1 なので、

$$\begin{aligned} E(n) &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \\ &= 1 + \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}. \end{aligned}$$

$$P_A(n) - P_B(n) = 3^{-n} \longrightarrow \text{第 } n \text{ 回の期待増分} = 3^{-n} \longrightarrow E(n) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

▶ 解法 2

【方針】

移動回数の偶奇で部屋を判定し、二項展開から確率差を直接求める。確率の漸化式を併記し、期待値は各回の期待増分を有限等比和として足す。

【解答】

(1) 移動確率は $\frac{1}{3}$ である。移動回数の偶奇を使うと

$$P_A(n) + P_B(n) = 1, \quad P_A(n) - P_B(n) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}.$$

したがって

n	1	2	3
$P_A(n)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{14}{27}$
$P_B(n)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{13}{27}$

であり、

$$E(3) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} = \frac{40}{27}.$$

(2) 1 回先の部屋について場合分けすると、

$$\begin{aligned} P_A(n+1) &= \frac{2}{3}P_A(n) + \frac{1}{3}P_B(n), \\ P_B(n+1) &= \frac{1}{3}P_A(n) + \frac{2}{3}P_B(n). \end{aligned}$$

(3) 和と差から

$$P_A(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^n}\right), \quad P_B(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

である。

(4) 第 k 回の期待増分は 3^{-k} だから、

$$\begin{aligned} E(n) &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}. \end{aligned}$$

【総評】 文系第 4 問に期待値の一般式が加わった問題で、目安時間は 18 分程度。確率漸化式は 2 本あるが、和と差に分けると実質的には等比数列になる。期待値では初期持ち点 1 と、第 1 試行から第 n 試行までの増分を足すため、和の始まりを $k = 1$ にする。移動回数の偶奇による別解も、差 $P_A - P_B$ の意味を明確にしてくれる。