

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2007 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える。

- (1) 点 $A(-\sqrt{2}, 0)$ と点 $O(0, 0)$ を通り、円 C に接する円の中心の座標を求めよ。
- (2) 点 P が円 C 上を動くとき、 $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

第 2 問

4 枚のカードがあって、1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1 枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返し、記録した順に数字を並べて得られる数列を、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ とする。

- (1) 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし、 $j = 1, 2, 3, 4$ とする。
- (i) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ。
- (ii) $n \geq 2$ のとき、 $A_n(j)$ ($j = 3, 4$) を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \dots, A_{n-1}(j)$ で表し、 $A_n(3), A_n(4)$ を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

第 3 問

xy 平面上の曲線 $y = xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x = n$, $x = n + 1$ で囲まれる図形を D_n とする。ただし, n を自然数とする。

(1) 図形 D_n の面積を S_n として, 次の極限を求めよ。

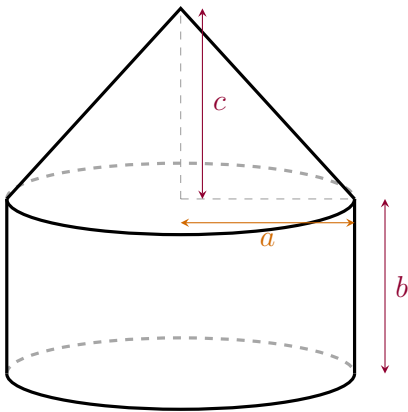
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{ne^n}$$

(2) 図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として, 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{(S_n)^2}$$

第 4 問

図のような、半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に、同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。



円柱と直円錐は半径 a の同じ底面円を共有する。

- (1) V をこの建物の体積、 S をこの建物の外側の表面積 (底面は除く) とする。 V と S を a , b , c で表せ。
- (2) V を一定に保ちながら a , b , c を動かして、 S を最小にしたい。
 - (i) $b = xa$, $c = ya$ とおき、 V と a を一定としたとき、 S の最小値 T を V と a で表せ。
 - (ii) T が最小となるときの比 $a : b : c$ を求めよ。

第 5 問

楕円 $C_1 : \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ と双曲線 $C_2 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。 C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば、 C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)