

北海道大学 2007 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える。

- (1) 点 $A(-\sqrt{2}, 0)$ と点 $O(0, 0)$ を通り、円 C に接する円の中心の座標を求めよ。
 (2) 点 P が円 C 上を動くとき、 $\cos \angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。

【方針】

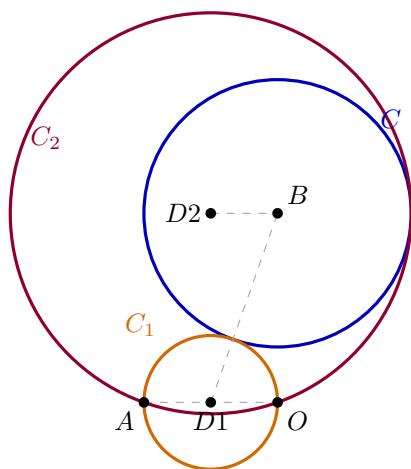
円 C を標準形に直したうえで、 A, O を通る円の中心を線分 AO の垂直二等分線上の $(-\sqrt{2}/2, s)$ とおく。半径 R と C との中心間距離を s で表し、外接・内接の条件から $s = 0, 2$ を得る。(2) は、 A, O, P を通る円が C と接する限界で円周角の極値を取ることを使い、弦 AO と半径 R の関係から $\cos \angle APO$ を求める。

【解答】

円 C は $x^2 + (y - 2)^2 = 2$ であり、中心を $B = (0, 2)$ 、半径を $\sqrt{2}$ とする。(1) $A(-\sqrt{2}, 0)$ と $O(0, 0)$ を通る円の中心は、線分 AO の垂直二等分線上にある。よって中心を $D = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, s\right)$ とおく。この円の半径 R は $R^2 = \frac{1}{2} + s^2$ であり、 D と B の距離 d は $d^2 = \frac{1}{2} + (s - 2)^2$ である。外接の場合は $d = R + \sqrt{2}$ である。平方して整理すると $d^2 = R^2 + 2 + 2\sqrt{2}R$ であり、 $d^2 - R^2 - 2 = 2 + 4s$ だから $2\sqrt{2}R = 2 + 4s$ となる。右辺が非負であることも考えると、これを平方して得られる候補のうち $s = 0$ だけが適する。内接の場合は $d = |R - \sqrt{2}|$ である。同様に $d^2 = R^2 + 2 - 2\sqrt{2}R$ より $2\sqrt{2}R = 4s - 2$ となり、候補のうち $s = 2$ だけが適する。したがって求める中心は

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right)$$

である。(2) 点 P が円 C 上を動くとき、 A, O, P を通る円は C と共有点をもつ。共有点をもつ範囲の限界では 2 円が接し、(1) で求めた $s = 0, 2$ の場合が角の極値を与える。弦 AO の長さは $\sqrt{2}$ である。 A, O, P を通る円の半径を R とすると $\sin \angle APO = \frac{AO}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2R}$ である。 $s = 0$ では $R = \sqrt{2}/2$ なので $\angle APO = 90^\circ$ であり、 $\cos \angle APO = 0$ である。 $s = 2$ では $R = 3\sqrt{2}/2$ なので $\sin \angle APO = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3\sqrt{2}/2} = \frac{1}{3}$ である。このときの角は鋭角であるから $\cos \angle APO = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ である。よって最大値は $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ であり、最小値は 0 である。

 C_1 は C に外接し、 C_2 は C に内接する。

【総評】 難度 6、計算量 5。 A, O を通る円の中心を 1 変数で置き、円 C との接触条件を解くのが前半の要点である。外接と内接の条件では右辺の符号条件が異なるため、平方後の候補をそのまま採用しないこと。(2) は円周角と外接円半径の関係に落とし込むと計算が簡単になる。極値候補が接するときに出る理由を添えると、図形的な説得力が増す。20 分程度で完答したい。

【第 2 問】

4 枚のカードがあって、1 から 4 までの整数がひとつずつ書かれている。このカードをよく混ぜて、1 枚引いては数字を記録し、カードを元に戻す。この試行を n 回繰り返す、記録した順に数字を並べて得られる数列を、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ とする。

(1) 条件 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし、 $j = 1, 2, 3, 4$ とする。

(i) $A_n(1), A_n(2)$ を求めよ。

(ii) $n \geq 2$ のとき、 $A_n(j)$ ($j = 3, 4$) を $A_{n-1}(1), A_{n-1}(2), \dots, A_{n-1}(j)$ で表し、 $A_n(3), A_n(4)$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

【方針】

非減少列は各数字の個数で決まる。最後が j である列を作るには、最後の j を 1 つ固定し、残り $n-1$ 個に 1 から j までの数字を非減少に並べればよい。これにより $A_n(3), A_n(4)$ を求める。(2) は最初の $n-1$ 個の非減少列の最後の値を j とし、最後の a_n は j より小さい $j-1$ 通りから選ぶ。最後に全事象 4^n で割る。

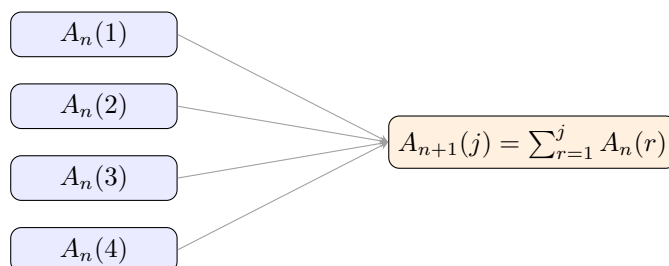
【解答】

(1) (i) 最後が 1 で非減少ならば、すべての項が 1 である。したがって $A_n(1) = 1$ である。最後が 2 で非減少ならば、列は 1 がいくつか並んだ後に 2 が並ぶ形である。最後は必ず 2 なので、1 の個数は $0, 1, \dots, n-1$ の n 通りである。よって $A_n(2) = n$ である。(ii) $n \geq 2$ とする。 $a_n = j$ で非減少である列は、直前までの最後の値が 1 から j のいずれかである。したがって $A_n(j) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + \dots + A_{n-1}(j)$ である。また、 $A_n(j)$ は最後の j を 1 つ固定し、残り $n-1$ 個に 1 から j までの数字を非減少に並べる方法の数である。したがって個数の分配で数えると $A_n(3) = {}_{n+1}C_2 = \frac{n(n+1)}{2}$

であり、 $A_n(4) = {}_{n+2}C_3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ である。(2) $m = n-1$ とおく。最初の m 個が非減少で、その最後の値が j であるとする。このとき a_n は $1, 2, \dots, j-1$ の $j-1$ 通りから選べる。したがって条件を満たす数列の個数は $A_m(2) + 2A_m(3) + 3A_m(4)$ である。ここに (1) の結果を代入すると

$$\begin{aligned} m + 2 \cdot \frac{m(m+1)}{2} + 3 \cdot \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \\ = m + m(m+1) + \frac{m(m+1)(m+2)}{2} \end{aligned}$$

である。 $m = n-1$ として整理すると $\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2}$ となる。全事象は、 n 回それぞれ 4 通りなので 4^n 通りである。よって求める確率は $\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4^n}$ である。



非減少列は、直前の末尾の値を累積して次の個数を作る。

【総評】 難度 5、計算量 5。文系第 3 問の拡張で、数字が 4 種類に増えた分だけ $A_n(4)$ と最後の下がり方の係数が増える。非減少列を「個数の分配」と見ると式が安定し、漸化式の意味も確認しやすい。(2) では $a_{n-1} = j$ のとき最後の選択肢が $j-1$ 個であることを明示するのが採点点である。確率にする段階で全事象を組合せではなく 4^n 通りとする点に注意したい。18 分前後が目安である。

【第 3 問】

xy 平面上の曲線 $y = xe^x$ と x 軸および 2 直線 $x = n$, $x = n + 1$ で囲まれる図形を D_n とする。ただし, n を自然数とする。

(1) 図形 D_n の面積を S_n として, 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{ne^n}$$

(2) 図形 D_n を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_n として, 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{(S_n)^2}$$

▶ 解法 1

【方針】

面積と回転体の体積を

$$S_n = \int_n^{n+1} xe^x dx, \quad V_n = \pi \int_n^{n+1} x^2 e^{2x} dx$$

と書く。原始関数から厳密な式を求め, ne^n と n^2e^{2n} で割って主要項を取り出す。最後に 2 つの極限を組み合わせる。

【解答】

(1) n は自然数なので, 区間 $[n, n+1]$ で $xe^x > 0$ である。したがって

$$S_n = \int_n^{n+1} xe^x dx.$$

部分積分により

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x$$

だから

$$\begin{aligned} S_n &= [(x-1)e^x]_n^{n+1} \\ &= ne^{n+1} - (n-1)e^n \\ &= e^n \{n(e-1) + 1\}. \end{aligned}$$

よって

$$\frac{S_n}{ne^n} = e - 1 + \frac{1}{n}$$

であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{ne^n} = e - 1.$$

(2) D_n を x 軸のまわりに回転すると, 半径 xe^x の円板を積み重ねた立体になる。したがって

$$V_n = \pi \int_n^{n+1} x^2 e^{2x} dx.$$

部分積分を繰り返すと

$$\int x^2 e^{2x} dx = e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

なので

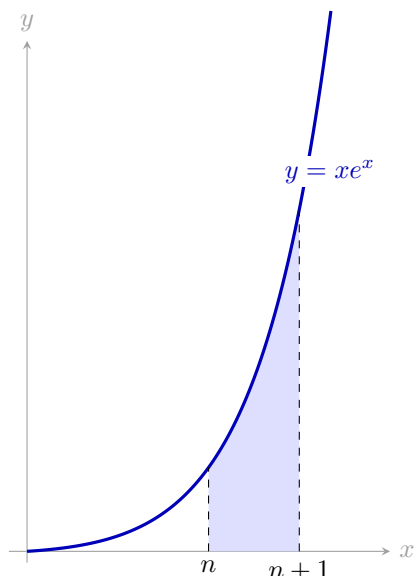
$$V_n = \pi e^{2n} \left[e^2 \left\{ \frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} \right\} - \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \right].$$

両辺を n^2e^{2n} で割ると, n の最高次の係数だけが残る,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n^2e^{2n}} = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$$

(1) と合わせて

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{S_n^2} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n^2 e^{2n}}}{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n e^n} \right)^2} \\ &= \frac{\pi(e^2 - 1)}{2(e - 1)^2} \\ &= \frac{\pi(e + 1)}{2(e - 1)}.\end{aligned}$$



D_n は幅 1 の曲線下領域で、回転時の半径は xe^x 。

▶ 解法 2

【方針】

積分区間を $x = n + u$ で固定区間 $[0, 1]$ へ移す。面積と体積をそれぞれ ne^n , $n^2 e^{2n}$ で割ると、被積分関数が直接収束するため主要項を読みやすい。

【解答】

(1) $x = n + u$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n e^n} &= \frac{1}{n e^n} \int_n^{n+1} x e^x dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{u}{n}\right) e^u du.\end{aligned}$$

$0 \leq u \leq 1$ で $1 + u/n \rightarrow 1$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n e^n} = \int_0^1 e^u du = e - 1.$$

(2) 同じ置換により

$$\begin{aligned}\frac{V_n}{n^2 e^{2n}} &= \frac{\pi}{n^2 e^{2n}} \int_n^{n+1} x^2 e^{2x} dx \\ &= \pi \int_0^1 \left(1 + \frac{u}{n}\right)^2 e^{2u} du.\end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{n^2 e^{2n}} = \pi \int_0^1 e^{2u} du = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2}.$$

したがって (1) と合わせて

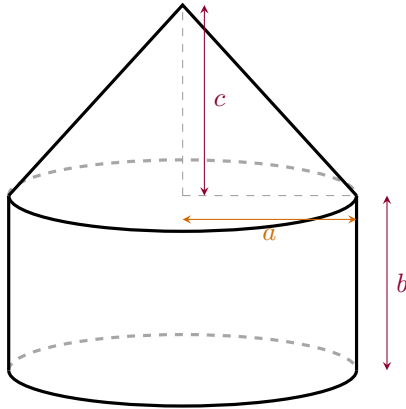
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{V_n}{S_n^2} = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2(e - 1)^2} = \frac{\pi(e + 1)}{2(e - 1)}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 5. 面積と回転体積を積分で表すところは標準的で, 勝負は極限で主要項を正しく読むことにある。原始関数を最後まで計算する場合, V_n では e^{2x} が現れるため, 係数が $e^2 - 1$ になる点を落としやすい。 $x = n + u$ の置換を使うと, 主要項の比較が見えやすく計算ミスの検算にもなる。15 分から 20 分で処理したい問題である。

【第 4 問】

図のような, 半径 a の円を底面とする高さ b の円柱の上に, 同じ大きさの円を底面とする高さ c の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。



円柱と直円錐は半径 a の同じ底面円を共有する。

- (1) V をこの建物の体積, S をこの建物の外側の表面積 (底面は除く) とする。 V と S を a, b, c で表せ。
- (2) V を一定に保ちながら a, b, c を動かして, S を最小にしたい。
 - (i) $b = xa, c = ya$ とおき, V と a を一定としたとき, S の最小値 T を V と a で表せ。
 - (ii) T が最小となるときの比 $a : b : c$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

体積は円柱と円錐, 表面積は円柱側面と円錐側面に分ける。 $b = xa, c = ya$ とおくと, 体積一定条件は $x + y/3 = V/(\pi a^3)$ である。制約 $x, y \geq 0$ から $0 \leq y \leq 3V/(\pi a^3)$ となるため, $-2y/3 + \sqrt{1+y^2}$ の内点最小 $y = 2/\sqrt{5}$ が許される場合と, 上端で最小になる場合を分ける。最後に全体最小を与える a を求める。

【解答】

(1) 円柱と直円錐の体積を足して

$$V = \pi a^2 b + \frac{1}{3} \pi a^2 c$$

である。底面を除く外側の表面積は, 円柱側面と円錐側面の和なので

$$S = 2\pi ab + \pi a \sqrt{a^2 + c^2}$$

である。(2)

(i) $b = xa, c = ya$ とおき

$$K = \frac{V}{\pi a^3}$$

とする。 $b, c \geq 0$ だから $x, y \geq 0$ であり,

$$x + \frac{y}{3} = K, \quad 0 \leq y \leq 3K.$$

体積条件から $x = K - y/3$ を消去すると

$$S = \frac{2V}{a} + \pi a^2 g(y), \quad g(y) = -\frac{2y}{3} + \sqrt{1+y^2}.$$

ここで

$$g'(y) = -\frac{2}{3} + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

だから、 g は $0 \leq y \leq 2/\sqrt{5}$ で減少し、その後増加する。したがって

$$T = \begin{cases} \frac{2V}{a} + \frac{\sqrt{5}}{3}\pi a^2 & \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \leq \frac{3V}{\pi a^3} \right), \\ \pi a^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3V}{\pi a^3} \right)^2} & \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \geq \frac{3V}{\pi a^3} \right). \end{cases}$$

等号のときは両式が一致する。第 2 の場合は $y = 3K$ ，すなわち $x = 0$ で最小になる。(ii) 全体最小は第 1 の場合の

$$T(a) = \frac{2V}{a} + \frac{\sqrt{5}}{3}\pi a^2$$

の内部で生じる。実際

$$T'(a) = -\frac{2V}{a^2} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\pi a$$

より

$$V = \frac{\sqrt{5}}{3}\pi a^3.$$

この値は第 1 の場合の条件を満たし、境界以後の第 2 の式は増加するので、これが全体最小である。実際、第 2 の場合の式を $T_2(a)$ とすると

$$T_2(a)^2 = \pi^2 a^4 + \frac{9V^2}{a^2}.$$

右辺の停留点は $a^3 = 3V/(\sqrt{2}\pi)$ である。一方、第 2 の場合の範囲は

$$a^3 \geq \frac{3\sqrt{5}V}{2\pi} > \frac{3V}{\sqrt{2}\pi}$$

だから、 $T_2(a)$ はその範囲全体で増加する。このとき

$$x + \frac{y}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

だから

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

よって

$$b = \frac{a}{\sqrt{5}}, \quad c = \frac{2a}{\sqrt{5}},$$

したがって

$$a : b : c = \sqrt{5} : 1 : 2$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

固定した V, a で現れる根号式を平方完成型の不等式で評価し、微分せずに $y = 2/\sqrt{5}$ を得る。ただし $0 \leq y \leq 3V/(\pi a^3)$ を先に確認し、等号点が区間外なら端点を選ぶ。

【解答】

(1) 円柱と円錐を分ければ

$$V = \pi a^2 b + \frac{1}{3} \pi a^2 c, \quad S = 2\pi ab + \pi a \sqrt{a^2 + c^2}$$

である。(2)

(i) $b = xa, c = ya, K = V/(\pi a^3)$ とおくと

$$x + \frac{y}{3} = K, \quad 0 \leq y \leq 3K$$

であり,

$$S = \frac{2V}{a} + \pi a^2 \left(-\frac{2y}{3} + \sqrt{1 + y^2} \right).$$

次の恒等式から

$$1 + y^2 - \left(\frac{2y + \sqrt{5}}{3} \right)^2 = \frac{(\sqrt{5}y - 2)^2}{9} \geq 0$$

である。したがって

$$\sqrt{1 + y^2} - \frac{2y}{3} \geq \frac{\sqrt{5}}{3},$$

等号は $y = 2/\sqrt{5}$ のときに限る。よって $3K \geq 2/\sqrt{5}$ なら内点で

$$T = \frac{2V}{a} + \frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^2.$$

$3K \leq 2/\sqrt{5}$ なら左辺は区間内で減少しているので $y = 3K$ を取り

$$T = \pi a^2 \sqrt{1 + 9K^2} = \pi a^2 \sqrt{1 + \left(\frac{3V}{\pi a^3} \right)^2}.$$

(ii) 第 1 の場合の式を a で最小化すると

$$V = \frac{\sqrt{5}}{3} \pi a^3.$$

第 2 の場合では

$$T^2 = \pi^2 a^4 + \frac{9V^2}{a^2}.$$

この右辺の停留点 $a^3 = 3V/(\sqrt{2}\pi)$ は、第 2 の場合の下端

$$a^3 = \frac{3\sqrt{5}V}{2\pi}$$

より小さい。したがって第 2 の場合の T は全域で増加し、第 1 の場合で得た極小値より小さくならない。このとき $K = \sqrt{5}/3, y = 2/\sqrt{5}$ なので

$$x = K - \frac{y}{3} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

したがって

$$a : b : c = 1 : x : y = \sqrt{5} : 1 : 2.$$

【総評】 難度 7, 計算量 6。立体を円柱部分と円錐部分に分け、固定した V, a のもとで屋根の高さ比 y を先に最適化する二段階の問題である。円錐側面積に母線 $\sqrt{a^2 + c^2}$ を使う点と、制約 $0 \leq y \leq 3V/(\pi a^3)$ を落とさない点が採点の中心になる。内点 $y = 2/\sqrt{5}$ が許されないときは円柱の高さが 0 になる端点が最小であり、固定した V, a に対する最小値は 2 場合に分かれる。最後は第 2 の場合がその範囲で増加することも確認してから、全体最小を与える $a : b : c$ を答える。25 分程度が目安である。

【第 5 問】

楕円 $C_1: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ と双曲線 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。 C_1 と C_2 の焦点が一致しているならば、 C_1 と C_2 の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。

【方針】

焦点が一致する条件を、楕円の焦点距離と双曲線の焦点距離の等式 $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 + b^2$ として書く。交点 (x, y) でそれぞれを陰関数として微分し、接線の傾き $-\beta^2 x / (\alpha^2 y)$, $b^2 x / (a^2 y)$ を得る。あとは交点条件から x^2 , y^2 を求め、傾きの積が -1 になることを示す。

【解答】

双曲線の焦点は x 軸上の原点でない 2 点である。焦点が一致するなら楕円の長軸も x 軸だから $\alpha > \beta$ である。楕円 C_1 の焦点距離の 2 乗は $\alpha^2 - \beta^2$ であり、双曲線 C_2 の焦点距離の 2 乗は $a^2 + b^2$ である。焦点が一致しているので $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 + b^2$ である。交点を (x, y) とする。まず、 $y = 0$ とすると楕円から $x^2 = \alpha^2$, 双曲線から $x^2 = a^2$ となるが、焦点一致条件と $\beta, b > 0$ により同時には成り立たない。したがって交点では $y \neq 0$ である。楕円を微分すると $\frac{2x}{\alpha^2} + \frac{2y}{\beta^2} y' = 0$ より、楕円の接線の傾きは $y'_1 = -\frac{\beta^2 x}{\alpha^2 y}$ である。双曲線を微分すると $\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} y' = 0$ より、双曲線の接線の傾きは $y'_2 = \frac{b^2 x}{a^2 y}$ である。したがって $y'_1 y'_2 = -\frac{\beta^2 b^2 x^2}{\alpha^2 a^2 y^2}$ である。これが -1 になることを示せばよい。交点条件は

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

である。これらから x^2, y^2 を消去して求める。第 1 式より $y^2 = \beta^2 \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)$ を第 2 式に代入すると

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) = 1$$

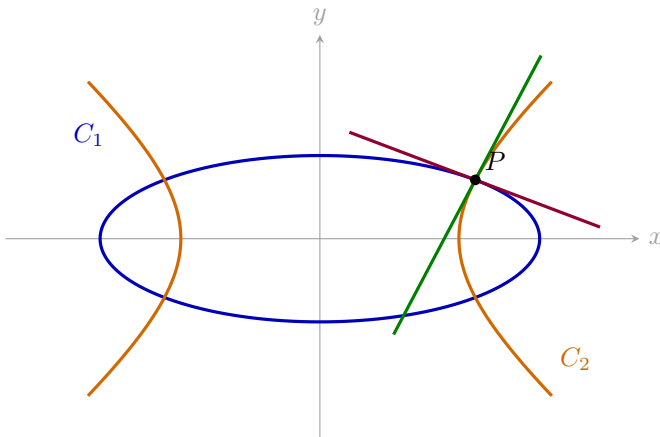
である。整理すると

$$x^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2 b^2} \right) = 1 + \frac{\beta^2}{b^2}$$

となり、焦点一致条件 $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 + b^2$ を用いると $x^2 = \frac{\alpha^2 a^2}{\alpha^2 - \beta^2}$ を得る。さらに双曲線の式から

$$y^2 = b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) = b^2 \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} - 1 \right) = \frac{\beta^2 b^2}{\alpha^2 - \beta^2}$$

である。よって $\frac{\beta^2 b^2 x^2}{\alpha^2 a^2 y^2} = 1$ であり、 $y'_1 y'_2 = -1$ となる。したがって 2 つの接線は直交する。



$\alpha = \sqrt{5}$, $\beta = 1$, $a = b = \sqrt{2}$ の例。2 本の接線の傾きの積は -1 。

【総評】 難度 6, 計算量 5。焦点一致により、まず楕円の長軸が x 軸で $\alpha > \beta$, さらに $\alpha^2 - \beta^2 = a^2 + b^2$ と確定する。あとは両曲線を微分し、交点条件から接線の傾きの積が -1 になることを示す。交点では $y \neq 0$ も確認しておく、傾きの式を安全に使える。文字は多いが構造は標準的で、20 分程度が目安である。