

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2012 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

1 k は実数, a, b, c, d は $ad - bc = 1$ を満たす実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す移動は以下の 3 条件を満たすとする。

- (イ) 直線 $y = x$ 上の点は直線 $y = x$ 上の点に移る。
- (ロ) 直線 $y = -x$ 上の点は直線 $y = -x$ 上の点に移る。
- (ハ) x 軸上の点は直線 $y = kx$ 上の点に移る。

- (1) k のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) A を k で表せ。

第 2 問

2 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

を考える。

- (1) $x = \sin \theta$ とおく。 $f(\theta)$ を x で表せ。
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。
- (3) 方程式 $f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

第 3 問

3 次の問に答えよ。

(1) $x \geq 0$ のとき, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ を示せ。

(2) $x \geq 0$ のとき,

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \frac{x^3}{3}$$

を示せ。

(3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ を求めよ。

第 4 問

4 実数 a, b に対して, $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = x^2 - 2bx + a$ とおく。

(1) $a \neq b$ のとき, $f(c) = g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2) (1) で求めた c について, a, b が条件 $a < c < b$ を満たすとする。このとき, 連立不等式

$$f(x) < 0 \text{ かつ } g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

(3) 一般に $a < b$ のとき, 連立不等式

$$f(x) < 0 \text{ かつ } g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を求め, その条件を満たす点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

第 5 問

5 A と B の 2 チームが試合を行い、どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を q とし, $p + q = 1$ とする。 A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

- (1) P_2 を p と q で表せ。
- (2) P_3 を p と q で表せ。
- (3) P_4 を p と q で表せ。
- (4) $\frac{1}{2} < q < 1$ のとき, $P_4 < P_3$ であることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)