

北海道大学 2012 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

1 k は実数, a, b, c, d は $ad - bc = 1$ を満たす実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す移動は以下の 3 条件を満たすとする。

- (イ) 直線 $y = x$ 上の点は直線 $y = x$ 上の点に移る。
 (ロ) 直線 $y = -x$ 上の点は直線 $y = -x$ 上の点に移る。
 (ハ) x 軸上の点は直線 $y = kx$ 上の点に移る。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) A を k で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

直線 $y = x$ と $y = -x$ がそれぞれ自分自身に移るので、方向ベクトル $(1, 1)$ 、 $(1, -1)$ の像が同じ直線上に残る条件を係数で書く。そこから $c = b, d = a$ を得て、 x 軸方向 $(1, 0)$ の像 (a, b) が $y = kx$ 上にあることから $b = ka$ を導く。最後に $ad - bc = 1$ で k の範囲と A の符号 2 通りを決める。

【解答】

(1) 行列 A によって点 (x, y) は $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ へ移る。

条件 (イ) より、直線 $y = x$ 上の方向ベクトル $(1, 1)$ の像 $(a + b, c + d)$ も直線 $y = x$ 上にある。したがって $a + b = c + d$ である。

条件 (ロ) より、直線 $y = -x$ 上の方向ベクトル $(1, -1)$ の像 $(a - b, c - d)$ も直線 $y = -x$ 上にある。したがって $c - d = -(a - b)$ である。2 式 $a + b = c + d$, $c - d = -a + b$ を加減すると $c = b$, $d = a$ を得る。

条件 (ハ) より、 x 軸上の方向ベクトル $(1, 0)$ の像 $(a, c) = (a, b)$ は直線 $y = kx$ 上にある。ここで $a = 0$ なら、後で得る $a^2 - b^2 = 1$ に反して不可能である。よって $b = ka$ である。

行列式条件 $ad - bc = 1$ は、 $c = b, d = a$ より $a^2 - b^2 = 1$ となる。さらに $b = ka$ を代入すると $a^2(1 - k^2) = 1$ である。左辺が正でなければならないので $1 - k^2 > 0$ である。したがって $-1 < k < 1$ である。

(2) (1) より $a^2(1 - k^2) = 1$ であるから $a = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}}$ である。また $b = ka$ 、 $c = b$ 、 $d = a$ なので

$$A = \begin{pmatrix} a & ka \\ ka & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

である。よって

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

または

$$A = -\frac{1}{\sqrt{1 - k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

である。

▶ 解法 2 (不変直線を固有方向として扱う)

【方針】

直線 $y = x$, $y = -x$ の方向ベクトルを固有ベクトルとして扱う。2 方向の倍率を α, β とすれば、行列式条件は $\alpha\beta = 1$ 、 x 軸の像の傾き条件は $k = (\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)$ となる。ここから倍率を決め、標準基底へ戻す。

【解答】

(1)

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とおく。条件 (イ)(ロ) より、ある実数 α, β が存在して

$$A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}, \quad A\mathbf{v} = \beta\mathbf{v}$$

と書ける。行列式は基底を変えても同じなので

$$\alpha\beta = \det A = 1.$$

一方、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$$

であるから、 x 軸方向の像は

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

$\alpha\beta = 1$ なので $\alpha + \beta = 0$ とはならない。条件 (ハ) より

$$k = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}.$$

$r = \alpha/\beta$ とおけば、 $\alpha\beta = 1$ より $r = \alpha^2 > 0$ であり、

$$k = \frac{r - 1}{r + 1}.$$

したがって

$$-1 < k < 1.$$

(2) 上式を r について解くと

$$r = \frac{1 + k}{1 - k}.$$

よって α, β は同符号で、

$$\alpha = \pm \sqrt{\frac{1+k}{1-k}}, \quad \beta = \pm \sqrt{\frac{1-k}{1+k}}$$

である。ただし 2 つの符号は同時に選ぶ。

基底 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ から標準基底へ戻すと

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha - \beta \\ \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

したがって

$$A = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

または

$$A = -\frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。不変な 2 直線を、方向ベクトルが同じ直線上へ移る条件として読み替える問題である。 $c = b, d = a$ まで出れば、あとは x 軸の像と行列式条件でほぼ決まる。 a の符号が正負 2 通り残る点、 $-1 < k < 1$ は行列式が正の実数として実現するための条件である点を落とさないようにしたい。第 2 解法では 2 本の不変直線を固有方向と見ること、行列の形と $-1 < k < 1$ の由来を幾何的に確認できる。

【第 2 問】

2 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数

$$f(\theta) = 4 \cos 2\theta \sin \theta + 3\sqrt{2} \cos 2\theta - 4 \sin \theta$$

を考える。

- (1) $x = \sin \theta$ とおく。 $f(\theta)$ を x で表せ。
- (2) $f(\theta)$ の最大値と最小値、およびそのときの θ の値を求めよ。
- (3) 方程式 $f(\theta) = k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

【方針】

(1)(2) は $x = \sin \theta$ によって三角関数を三次関数 $F(x)$ に直し、 $-1 \leq x \leq 1$ の端点と停留点を比較する。(3) では $\sin \theta$ が与えられた区間で一対一であることを使い、 $F(x) = k$ が 3 つの単調区間それぞれで 1 解ずつもつ条件を、極小値・端点値・極大値の上下関係から読む。

【解答】

(1) $x = \sin \theta$ とおく。 $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ なので $-1 \leq x \leq 1$ である。二倍角の公式より $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2x^2$ であるから $f(\theta) = 4(1 - 2x^2)x + 3\sqrt{2}(1 - 2x^2) - 4x$ である。整理して $f(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$ である。

(2) $F(x) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$ とおく。 $x = \sin \theta$ はこの区間で一対一に $[-1, 1]$ を動くので、 $F(x)$ の最大・最小を調べればよい。

微分すると $F'(x) = -24x^2 - 12\sqrt{2}x = -12x(2x + \sqrt{2})$ である。したがって停留点は $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = 0$ である。端

点も含めると $F(-1) = 8 - 3\sqrt{2}$, $F\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$, $F(0) = 3\sqrt{2}$, $F(1) = -8 - 3\sqrt{2}$ である。よって最大値は $3\sqrt{2}$ ($\theta = 0$) であり、最小値は $-8 - 3\sqrt{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{2}$) である。

(3) $F'(x) = -12x(2x + \sqrt{2})$ より、 $F(x)$ は

$$[-1, -\sqrt{2}/2] \text{ で減少, } [-\sqrt{2}/2, 0] \text{ で増加, } [0, 1] \text{ で減少}$$

である。各区間の端の値は

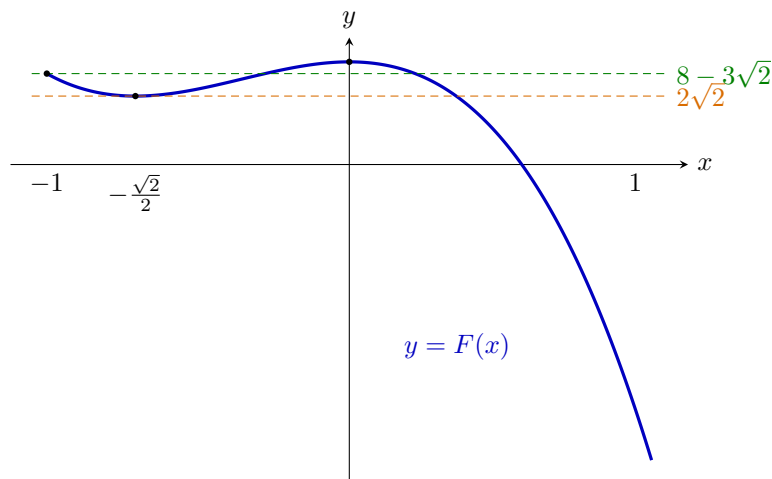
$$F(-1) = 8 - 3\sqrt{2}, \quad F(-\sqrt{2}/2) = 2\sqrt{2}, \quad F(0) = 3\sqrt{2}, \quad F(1) = -8 - 3\sqrt{2}$$

である。

方程式 $F(x) = k$ が 3 つの相異なる解をもつには、3 つの単調区間それぞれで 1 つずつ交点をもてばよい。左の区間で交点をもつには $2\sqrt{2} \leq k \leq 8 - 3\sqrt{2}$ が必要である。ただし $k = 2\sqrt{2}$ では、左区間と中央区間の交点と同じ点 $x = -\sqrt{2}/2$ になり、相異なる解は 2 つに減る。したがって下端は含まない。

中央区間と右区間の条件も合わせると、求める範囲は $2\sqrt{2} < k \leq 8 - 3\sqrt{2}$ である。上端 $k = 8 - 3\sqrt{2}$ では $x = -1$ が 1

つの解となり、中央区間と右区間にも 1 つずつ解があるので、相異なる 3 解をもつ。



水平線 $y = k$ がグラフと相異なる 3 点で交わる範囲は $2\sqrt{2} < k \leq 8 - 3\sqrt{2}$ である。下端では極小点に接して 2 点に減るが、上端では $x = -1$ を含めて 3 点となる。

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。文系第 2 問の最大最小に、水平線との交点数判定が加わった問題である。増減表を作ると、 $k = 2\sqrt{2}$ は極小点で接するだけなので除外、 $k = 8 - 3\sqrt{2}$ は端点解を含めて 3 解になるので含める、という端点処理が明確になる。 θ ではなく $x = \sin \theta$ で解の個数を数えてよいのは、この区間で一対一だからである。

【第 3 問】

3 次の問に答えよ。

- (1) $x \geq 0$ のとき、 $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ を示せ。
 (2) $x \geq 0$ のとき、

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \frac{x^3}{3}$$

を示せ。

- (3) 極限値 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ を求めよ。

【方針】

(1) は $x - \sin x$ と $\sin x - x + x^3/6$ を補助関数にして、微分の符号から上下評価を作る。(2) は (1) の不等式に $t \geq 0$ を掛けて 0 から x まで積分する。(3) は分子 $\sin x - x \cos x$ が

$$\int_0^x t \sin t dt$$

に等しいことを部分積分で示し、(2) の評価ではさむ。最後に式が偶関数になるため両側極限も同じであることを確認する。

【解答】

(1) まず $h(x) = x - \sin x$ とおく。 $x \geq 0$ で $h'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ であり、 $h(0) = 0$ だから $\sin x \leq x$ である。

次に $\phi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ とおく。すると $\phi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$, $\phi''(x) = -\sin x + x = x - \sin x$ である。すでに示した $\sin x \leq x$ より、 $x \geq 0$ で $\phi''(x) \geq 0$ である。さらに $\phi'(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ だから、 $\phi'(x) \geq 0$ 、さらに $\phi(x) \geq 0$ が従う。よって $\sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0$ すなわち $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$ である。

(2) $0 \leq t \leq x$ では $t \geq 0$ なので、(1) の不等式に t を掛けて $t^2 - \frac{t^4}{6} \leq t \sin t \leq t^2$ を得る。これを 0 から x まで積分すると

$$\int_0^x \left(t^2 - \frac{t^4}{6} \right) dt \leq \int_0^x t \sin t dt \leq \int_0^x t^2 dt$$

である。したがって

$$\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \leq \int_0^x t \sin t \, dt \leq \frac{x^3}{3}$$

である。

(3) 部分積分を用いると

$$\int_0^x t \sin t \, dt = [-t \cos t]_0^x + \int_0^x \cos t \, dt = -x \cos x + \sin x$$

である。よって

$$\sin x - x \cos x = \int_0^x t \sin t \, dt$$

である。 $x > 0$ について (2) を x^3 で割ると $\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \leq \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \leq \frac{1}{3}$ である。はさみうちより $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$ である。

さらに $\sin x - x \cos x$ は奇関数であり、 x^3 も奇関数なので、商 $\frac{\sin x - x \cos x}{x^3}$ は偶関数である。したがって左側極限も同じ値になり、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$ である。

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。三角関数の近似公式を名前で使うのではなく、補助関数の微分符号から必要な不等式を作る問題である。(2) は不等式に $t \geq 0$ を掛けて積分するだけだが、積分範囲の符号条件を明記することが大切である。(3) では部分積分で分子を積分に戻す発想と、問題の極限が両側極限であることへの一言が答案の完成度を上げる。

【第 4 問】

4 実数 a, b に対して、 $f(x) = x^2 - 2ax + b$, $g(x) = x^2 - 2bx + a$ とおく。

(1) $a \neq b$ のとき、 $f(c) = g(c)$ を満たす実数 c を求めよ。

(2) (1) で求めた c について、 a, b が条件 $a < c < b$ を満たすとする。このとき、連立不等式

$$f(x) < 0 \text{ かつ } g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を a, b を用いて表せ。

(3) 一般に $a < b$ のとき、連立不等式

$$f(x) < 0 \text{ かつ } g(x) < 0$$

が解をもつための必要十分条件を求め、その条件を満たす点 (a, b) の範囲を ab 平面上に図示せよ。

【方針】

まず $f(x) - g(x) = (b-a)(2x+1)$ から、2つの放物線の交点の x 座標が常に $-1/2$ であることを確認する。 $a < b$ のもとでは $x < -1/2$ で $f < g$ 、 $x > -1/2$ で $g < f$ なので、共通に負になるかは上側にある放物線の最小値で決まる。頂点 a, b が交点 $-1/2$ の左側・両側・右側のどこにあるかで 3 場合に分け、必要十分条件を作る。

【解答】

(1) $f(c) = g(c)$ より $c^2 - 2ac + b = c^2 - 2bc + a$ である。整理すると $2(b-a)c = a-b$ である。 $a \neq b$ だから $b-a \neq 0$ であり、 $c = -\frac{1}{2}$ を得る。

(2) (1) で求めた c は $-1/2$ である。条件 $a < c < b$ は $a < -\frac{1}{2} < b$ を意味する。

2つの放物線は $x = -1/2$ で交わる。また $f(x) - g(x) = 2(b-a)x + (b-a) = (b-a)(2x+1)$ であり、ここでは $a < b$ だから、 $x < -1/2$ では $f(x) < g(x)$ 、 $x > -1/2$ では $g(x) < f(x)$ である。

いま f の頂点は $x = a < -1/2$ 、 g の頂点は $x = b > -1/2$ にある。したがって、共通に負となる点があるかどうかは、2つのグラフが入れ替わる点 $x = -1/2$ での共通値が負かどうかで決まる。実際、 $x < -1/2$ で上側にあるのは g で、 g は $-1/2$ へ近づくほど小さくなる。また $x > -1/2$ で上側にあるのは f で、 f は $-1/2$ から離れるほど大きくなる。

よって必要十分条件は $f(-\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2}) < 0$ である。計算すると $f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + a + b$ だから、求める条件は $a + b + \frac{1}{4} < 0$ である。

(3) 一般に $a < b$ とする。このときも交点は $x = -1/2$ であり、 $f(x) - g(x) = (b-a)(2x+1)$ だから、 $x < -1/2$ では $f(x) < g(x)$ 、 $x > -1/2$ では $g(x) < f(x)$ である。したがって共通に負となるには、上側にある方の放物線が負になるところを調べればよい。

場合 1: $b \leq -1/2$ のとき。 $a < b \leq -1/2$ なので、2つの頂点はいずれも交点の左側にある。左側で上側にあるのは g であり、 g の頂点 $x = b$ も左側にある。したがって共通に負となる点が存在するための必要十分条件は $g(b) < 0$ である。これは $b^2 - 2b^2 + a = a - b^2 < 0$ すなわち $a < b^2$ である。

場合 2: $a < -1/2 < b$ のとき。これは (2) と同じ配置なので、必要十分条件は $a + b + \frac{1}{4} < 0$ である。

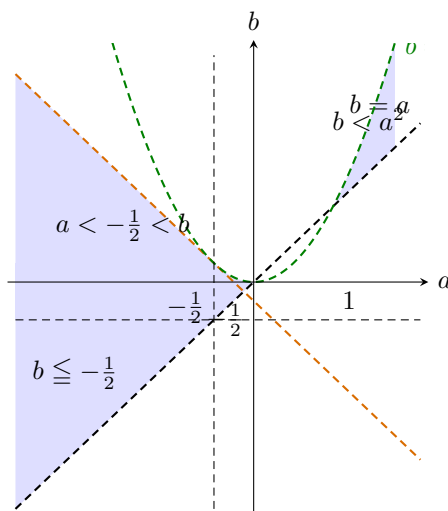
場合 3: $-1/2 \leq a$ のとき。 $-1/2 \leq a < b$ なので、2つの頂点はいずれも交点の右側にある。右側で上側にあるのは f であり、 f の頂点 $x = a$ も右側にある。したがって共通に負となる点が存在するための必要十分条件は $f(a) < 0$ である。これは $a^2 - 2a^2 + b = b - a^2 < 0$ すなわち $b < a^2$ である。

以上より、 $a < b$ のもとで求める必要十分条件は

$$\begin{cases} b \leq -\frac{1}{2}, & a < b^2, \\ a < -\frac{1}{2} < b, & a + b + \frac{1}{4} < 0, \\ -\frac{1}{2} \leq a, & b < a^2 \end{cases}$$

のいずれかである。

図示すると、直線 $a = b$ に対して $a < b$ となる側だけに限り、 $b \leq -1/2$ では放物線 $a = b^2$ の左側、 $a < -1/2 < b$ では直線 $a + b + 1/4 = 0$ の下側、 $-1/2 \leq a$ では放物線 $b = a^2$ の下側を取る。境界 $a = b^2$ 、 $a + b + 1/4 = 0$ 、 $b = a^2$ は不等式が厳密なので含まない。



青色部分が条件を満たす範囲であり、いずれも $a < b$ の側だけを取る。 $f(x) < 0$ 、 $g(x) < 0$ は厳密不等式なので、破線で示した境界は含まない。

【総評】 難度 8、目安時間 30 分。2つの二次不等式の解区間の重なりを直接根で追うと煩雑になりやすいが、 $f - g = (b - a)(2x + 1)$ から上側のグラフが交点で入れ替わると見ると整理できる。頂点 a, b が $-1/2$ に対してどちら側にあるかで3場合に分けること、各場合で上側の放物線の最小値が負かどうかを必要十分条件として書くことが採点の中心である。図示では境界を含まない点にも注意したい。3場合の条件を同じ ab 平面へ重ねた図で、 $a = b$ のどちら側か、厳密不等式の境界を含まないことまで確認できる。

【第 5 問】

5 A と B の 2 チームが試合を行い、どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を q とし, $p + q = 1$ とする。 A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

- (1) P_2 を p と q で表せ。
- (2) P_3 を p と q で表せ。
- (3) P_4 を p と q で表せ。
- (4) $\frac{1}{2} < q < 1$ のとき, $P_4 < P_3$ であることを示せ。

【方針】

A が先に k 勝して終了する場合、最後の試合は必ず A の勝ちである。最後の直前までに A は $k-1$ 勝しており、 B の勝ち数 j は $0 \leq j \leq k-1$ で止まるので、直前までの勝敗列は ${}_{k-1+j}C_j$ 通りになる。この数え方で P_2, P_3, P_4 を出し、最後は $p = 1 - q$ として $P_3 - P_4$ を正の因子に分解する。

【解答】

(1) A が先に 2 勝して終了するには、最後の試合は A が勝つ。最後の直前までに A は 1 勝しており、 B は 0 勝または 1 勝である。

B が 0 勝なら勝敗列は AA の 1 通り、 B が 1 勝なら最後の A の前に A, B が 1 回ずつ並ぶので 2 通りである。したがって $P_2 = p^2 + 2p^2q = p^2(1 + 2q)$ である。

(2) A が先に 3 勝して終了するには、最後の試合は A が勝ち、その直前までに A は 2 勝している。直前までの B の勝ち数を j とすると、 $j = 0, 1, 2$ である。

B が j 勝のとき、最後の前の $2 + j$ 試合の中で B の勝ちの位置を選べばよいので ${}_{2+j}C_j$ 通りである。したがって $P_3 = p^3 \sum_{j=0}^2 {}_{2+j}C_j q^j = p^3(1 + 3q + 6q^2)$ であり、 $P_3 = p^3(1 + 3q + 6q^2)$ である。

(3) 同様に、 A が先に 4 勝して終了するには、最後の前に A は 3 勝、 B は $j = 0, 1, 2, 3$ 勝している。 B が j 勝のとき、最後の前の $3 + j$ 試合における B の勝ちの位置は ${}_{3+j}C_j$ 通りである。よって $P_4 = p^4 \sum_{j=0}^3 {}_{3+j}C_j q^j = p^4(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)$ である。したがって $P_4 = p^4(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)$ である。

(4) $p = 1 - q$ である。(2),(3) より $P_3 - P_4 = p^3(1 + 3q + 6q^2) - p^4(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)$ である。共通因子 p^3 をくくり、 $p = 1 - q$ を代入すると $P_3 - P_4 = p^3\{1 + 3q + 6q^2 - (1 - q)(1 + 4q + 10q^2 + 20q^3)\}$ である。中括弧の中を整理すると $1 + 3q + 6q^2 - (1 + 3q + 6q^2 + 10q^3 - 20q^4) = 10q^3(2q - 1)$ となる。したがって $P_3 - P_4 = 10p^3q^3(2q - 1)$ である。

条件 $1/2 < q < 1$ のもとでは $p = 1 - q > 0$, $q > 0$, $2q - 1 > 0$ であるから $P_3 - P_4 > 0$ である。よって $P_4 < P_3$ が示された。

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。前期文系第 4 問の延長で、 P_4 まで同じ数え方を正確に実行する問題である。最後の試合を固定し、直前までの B の勝ち数 j ごとに ${}_{k-1+j}C_j$ を使うと係数 1, 4, 10, 20 の根拠が明確になる。(4) は展開量が少し多いので、共通因子 p^3 を先にくくってから $p = 1 - q$ を代入すると符号判定まで崩れにくい。