

北海道大学 2013 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

1 $f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) とする。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とおき, $f(x)$ を t の関数で表せ。
 (2) t の取り得る値の範囲を求めよ。
 (3) $f(x)$ の最大値と最小値, およびそのときの x の値を求めよ。

【方針】

和 $t = \sin x + \cos x$ を先に固定すると、積は $2 \sin x \cos x = t^2 - 1$ から消去でき、問題全体が 1 変数の二次関数になる。三角関数の合成で t の正確な範囲を求め、軸と両端の値を比較する。最後に、極値を与える t から区間 $0 \leq x \leq 2\pi$ 内の x をすべて復元する。

【解答】

(1) $t = \sin x + \cos x$ とおく。平方すると $t^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$ であるから、 $\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$

である。よって $f(x) = \sqrt{2} \sin x \cos x + \sin x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}(t^2 - 1) + t$ と表せる。

(2) $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ であり、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の中で $x + \pi/4$ は長さ 2π の区間を動く。したがって $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ である。

(3) $F(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 + t - \frac{\sqrt{2}}{2}$ とおくと、 $F(t)$ は下に凸の二次関数で、軸は $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。これは $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ に含まれるので、最小値は

$$F\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

である。このとき $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ より $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ 。したがって $x + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ となり、 $x = \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}$ で最小値をとる。

最大値は区間の端で比べればよい。計算すると

$$F(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$F(-\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

であるから、最大値は $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ である。このとき $t = \sqrt{2}$ 、すなわち $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ だから $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ より $x = \frac{\pi}{4}$ である。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 12 分。採点の中心は t の範囲を $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ と正しく押さえ、二次関数の軸と両端を比較することにある。最小値だけでなく最大値も端点比較し、極値を与える x を元の区間内ですべて戻す。典型ミスは t の値だけで終えること、最大値も軸でとると誤認することである。

【第 2 問】

2 次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

- (i) X が 4 の倍数ならば、点 P は x 軸方向に -1 動く。
- (ii) X を 4 で割った余りが 1 ならば、点 P は y 軸方向に -1 動く。
- (iii) X を 4 で割った余りが 2 ならば、点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。
- (iv) X を 4 で割った余りが 3 ならば、点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば、2 と 5 が出た場合には $2 \times 5 = 10$ を 4 で割った余りが 2 であるから、点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも、点 P は原点 $(0, 0)$ を出発点とする。

- (1) 2 個のサイコロを 1 回投げて、点 P が $(1, 0)$ にある確率を求めよ。
- (2) 2 個のサイコロを 1 回投げて、点 P が $(0, 1)$ にある確率を求めよ。
- (3) 2 個のサイコロを 3 回投げて、点 P が $(2, 1)$ にある確率を求めよ。

【方針】

最初に 36 通りを積の 4 による余りで分類し、東西南北への 1 回の移動確率を表にする。(1)、(2) は表から直ちに読み取り、(3) は原点から目標点までの距離が投げる回数と一致することに注目する。したがって逆向きの移動は入らず、必要な 3 移動の並べ方だけを数えればよい。

【解答】

2 個のさいころの目の積を 4 で割った余りを調べる。全事象は 36 通りである。

積が 4 の倍数になるのは、少なくとも一方が 4 で割り切れる場合、または両方が偶数で少なくとも一方が 2, 6 である場合を含めて数えると 15 通りである。したがって余り 0 の確率は $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ である。

余りごとに数えると、

余り	通り数	確率
0	15	$\frac{5}{12}$
1	5	$\frac{5}{36}$
2	12	$\frac{1}{3}$
3	4	$\frac{1}{9}$

である。問題の規則より、余り 0, 1, 2, 3 はそれぞれ $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ への移動に対応する。

(1) 1 回で $(1, 0)$ に移動するには余りが 2 であればよい。よって求める確率は $\frac{1}{3}$ である。

(2) 1 回で $(0, 1)$ に移動するには余りが 3 であればよい。よって求める確率は $\frac{1}{9}$ である。

(3) 3 回後に $(2, 1)$ にいるためには、原点からのマンハッタン距離が 3 であり、3 回の移動も全部で 3 歩であるから、遠回りをする余地がない。したがって必要な移動は $(1, 0), (1, 0), (0, 1)$ の 3 つだけである。

この 3 つの並べ方は $\frac{3!}{2!1!} = 3$ 通りであり、各並べ方の確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{9}\right)$ である。したがって求める確率は $3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{27}$ である。

【総評】 難度 4、計算量 3。目安時間は 10 分。最初の余り別 36 通りの表が全設問の土台になるので、縦横のさいころを区別して数える。(3) では目標点までの距離が 3 であるため、逆向きの歩きを含められない理由を書く及答案が締まる。余り 0 の数え落としと、同じ東向き 2 回を区別して $3!$ とする誤りに注意する。

【第 3 問】

3 空間ベクトル $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を考える。 $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1$ で, $\vec{b}$ は xy 平面上にあり, その y 成分は正とする。また, $\vec{a} \cdot \vec{b} = p$ とおく。

(1) $|p| < 1$ であることを示せ。また, p を用いて $\vec{b}$ の成分表示を書け。

(2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ は相異なり,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{d} = p$$

をみたすとする。 $\vec{c}$ の z 成分が正のとき, p を用いて $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の成分表示を書け。

(3) 上の条件に加えて $\vec{c} \cdot \vec{d} = p$ であるとき p の値を求めよ。

【方針】

内積条件を座標に直して成分を順に決める。まず $\vec{b}$ の単位条件と y 成分の符号から $\vec{b}$ を確定し, $\vec{c}, \vec{d}$ は共通の x, y 成分と互いに反対符号の z 成分をもつことを示す。単位条件から平方根の実在範囲も確認し、最後に $\vec{c} \cdot \vec{d} = p$ を代数方程式へ落として範囲外の解を除く。

【解答】

(1) $\vec{b} = (u, v, 0)$ とおく。 $\vec{a} = (1, 0, 0)$ であるから, $\vec{a} \cdot \vec{b} = u = p$ である。また $\vec{b}$ は単位ベクトルなので $u^2 + v^2 = 1$ である。 $\vec{b}$ の y 成分は正だから $v = \sqrt{1 - p^2}$ でなければならない。したがって $|p| < 1$, $\vec{b} = (p, \sqrt{1 - p^2}, 0)$ である。

(2) $q = \sqrt{1 - p^2}$ とおき, $\vec{c} = (x, y, z)$ とする。条件 $\vec{a} \cdot \vec{c} = p$ より $x = p$ である。また $\vec{b} \cdot \vec{c} = p$ より $p^2 + qy = p$ だから $y = \frac{p - p^2}{q} = \frac{p(1 - p)}{\sqrt{1 - p^2}}$ である。

さらに $\vec{c}$ は単位ベクトルであるから $p^2 + \frac{p^2(1 - p)^2}{1 - p^2} + z^2 = 1$ となる。ここで $z^2 = 1 - p^2 - \frac{p^2(1 - p)^2}{1 - p^2} = \frac{(1 - p)(2p + 1)}{p + 1}$ である。 $|p| < 1$ のもとで $p + 1 > 0$, $1 - p > 0$ だから、実数の z が存在するための条件は $2p + 1 > 0$ すなわち $-\frac{1}{2} < p < 1$ である。 z 成分が正である方を $\vec{c}$ 、負である方を $\vec{d}$ とすれば、

$$\vec{c} = \left(p, \frac{p(1 - p)}{\sqrt{1 - p^2}}, \sqrt{\frac{(1 - p)(2p + 1)}{p + 1}} \right),$$

$$\vec{d} = \left(p, \frac{p(1 - p)}{\sqrt{1 - p^2}}, -\sqrt{\frac{(1 - p)(2p + 1)}{p + 1}} \right)$$

である。

(3) 上の表示から

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = p^2 + \frac{p^2(1 - p)^2}{1 - p^2} - \frac{(1 - p)(2p + 1)}{p + 1}$$

である。整理すると $\vec{c} \cdot \vec{d} = \frac{4p^2 - p - 1}{p + 1}$ となる。これが p に等しいので、 $\frac{4p^2 - p - 1}{p + 1} = p$ である。 $p + 1 \neq 0$ だから $4p^2 - p - 1 = p^2 + p$ すなわち $3p^2 - 2p - 1 = 0$ を得る。よって $(3p + 1)(p - 1) = 0$ である。 $p = 1$ は $p < 1$ に反するので、求める値は $p = -\frac{1}{3}$ である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 25 分。内積条件を座標へ落とし、共通成分を順番に確定するのが中心である。(2) では $z^2 > 0$ から $-1/2 < p < 1$ を得る部分が、2 点が相異なる条件と最後の解の除外に効く。平方根の符号、 $\vec{c}, \vec{d}$ の z 成分の符号、候補 $p = 1$ の除外を一続きで書く。

【第 4 問】

4 実数 t が $0 \leq t < 8$ をみたすとき、点 $P(t, t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を考える。

- (1) 点 P から放物線 $y = x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。
 (2) (1) での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ , PR と放物線 $y = x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

【方針】

放物線 $y = x^2$ の接線を、接点の x 座標 u を用いて $y = 2ux - u^2$ と表す。点 P を通る条件は u の二次方程式になるので、判別式を因数分解して異なる 2 接線の実在性を保証する。2 接点を $t-s, t+s$ と対称に置き、放物線と各接線の差が平方になることを使って、2 つの表示積分から面積を求める。

【解答】

(1) 放物線 $y = x^2$ 上の x 座標 u における接線は

$$y = 2ux - u^2$$

である。この接線が $P(t, t^3 - 8t^2 + 15t - 56)$ を通る条件は

$$u^2 - 2tu + t^3 - 8t^2 + 15t - 56 = 0$$

である。

この二次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = t^2 - (t^3 - 8t^2 + 15t - 56) = (8-t)(t^2 - t + 7)$$

である。 $0 \leq t < 8$ では $8-t > 0$ であり、

$$t^2 - t + 7 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} > 0$$

だから $D > 0$ である。よって点 P から放物線へ異なる 2 本の接線が引ける。

(2) 2 つの接点の x 座標を α, β とする。解と係数の関係より $\alpha + \beta = 2t$ であるから、

$$\alpha = t - s, \quad \beta = t + s$$

と表せる。ただし

$$s^2 = (8-t)(t^2 - t + 7)$$

である。

左側と右側の接線は、それぞれ $y = 2\alpha x - \alpha^2$, $y = 2\beta x - \beta^2$ である。放物線との差は

$$x^2 - (2\alpha x - \alpha^2) = (x - \alpha)^2, \quad x^2 - (2\beta x - \beta^2) = (x - \beta)^2$$

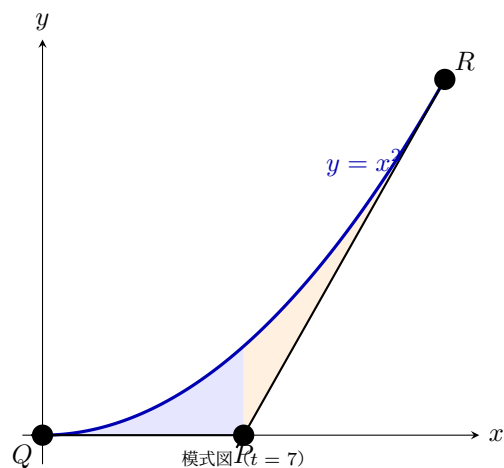
となる。2 接線の交点 P の x 座標は t なので、囲まれる面積は

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{\alpha}^t (x - \alpha)^2 dx + \int_t^{\beta} (x - \beta)^2 dx \\ &= \frac{(t - \alpha)^3}{3} + \frac{(\beta - t)^3}{3} \\ &= \frac{2s^3}{3}. \end{aligned}$$

したがって

$$S(t) = \frac{2}{3} \{(8-t)(t^2 - t + 7)\}^{3/2}.$$

接線と面積を取る 2 区間の位置関係は次の模式図のようになる。



【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 25 分。接点を u とした接線表示と、判別式 $(8-t)(t^2-t+7) > 0$ の確認が前半の得点源である。後半は 2 接点の平均が t になる対称性と、放物線と接線の差が平方になることを利用する。図の左右 2 領域に対応する積分を分け、判別式の平方根と面積の $3/2$ 乗を混同しないこと。