

# 北海道大学 2014 年度 理系

## 解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

### 【第 1 問】

1  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$  とする。

- (1) 関数  $f(x)$  の極大値と極小値、およびそのときの  $x$  を求めよ。  
 (2) 曲線  $y = f(x)$  に 2 点  $(a, f(a))$  と  $(b, f(b))$  ( $a < b$ ) で接する直線の方程式を求めよ。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

(1) は導関数を因数分解して増減表を作り、極値の種類と値を確認する。(2) は、2 点  $x = a, b$  で同じ直線が接するためには接線の傾きと切片が一致する、という条件を立てる。 $s = a + b$ 、 $q = ab$  で対称式に直すと計算が整理される。最後に  $a \neq b$  を満たす候補だけを残し、接線の傾きと切片を求める。

#### 【解答】

(1)  $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2$  であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 - 12x^2 - 16x \\ &= 4x(x^2 - 3x - 4) \\ &= 4x(x - 4)(x + 1) \end{aligned}$$

である。したがって増減が変わる候補は  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$  である。

符号を調べると、 $f'(x)$  は

$(-\infty, -1)$  で負,  $(-1, 0)$  で正,  $(0, 4)$  で負,  $(4, \infty)$  で正

である。よって  $x = -1$  と  $x = 4$  で極小、 $x = 0$  で極大をとる。

それぞれの値は  $f(-1) = 1 + 4 - 8 = -3$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(4) = 256 - 256 - 128 = -128$  である。したがって  $x = 0$  のとき極大値  $0$  であり、極小値は  $x = -1$  のとき  $-3$ ,  $x = 4$  のとき  $-128$  である。

(2)

点  $x = u$  における接線は  $y = f'(u)(x - u) + f(u)$  すなわち  $y = f'(u)x + \{f(u) - uf'(u)\}$  である。2 点  $x = a, b$  で同じ直線に接するためには、傾きと切片がともに一致する必要がある。したがって  $f'(a) = f'(b)$  かつ  $f(a) - af'(a) = f(b) - bf'(b)$  である。

まず  $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$  なので、 $a \neq b$  を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= f'(a) - f'(b) \\ &= 4(a - b)\{a^2 + ab + b^2 - 3(a + b) - 4\} \end{aligned}$$

である。よって  $a^2 + ab + b^2 - 3(a + b) - 4 = 0$  を得る。

次に

$$\begin{aligned} f(x) - xf'(x) &= x^4 - 4x^3 - 8x^2 - x(4x^3 - 12x^2 - 16x) \\ &= -3x^4 + 8x^3 + 8x^2 \end{aligned}$$

である。したがって同様に  $a \neq b$  で割ると  $-3(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) + 8(a^2 + ab + b^2) + 8(a + b) = 0$  である。

ここで  $s = a + b$ ,  $q = ab$  とおくと  $a^2 + ab + b^2 = s^2 - q$  であるから、傾き一致の条件は  $s^2 - q - 3s - 4 = 0$  すなわち  $q = s^2 - 3s - 4$  である。また  $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3 = s^3 - 2qs$  なので、切片一致の条件は  $-3s^3 + 6qs + 8s^2 - 8q + 8s = 0$  である。ここへ  $q = s^2 - 3s - 4$  を代入すると  $3s^3 - 18s^2 + 8s + 32 = 0$  となる。因数分解して  $(s - 2)(3s^2 - 12s - 16) = 0$  である。 $3s^2 - 12s - 16 = 0$  のときは、 $a, b$  を解にもつ 2 次方程式の判別式  $s^2 - 4q = -3s^2 + 12s + 16$  が 0 になる。実際、 $3s^2 = 12s + 16$  だからこの値は 0 である。これは  $a = b$  を意味し、問題の条件  $a < b$  に反する。したがって  $s = 2$  だけが残る。このとき  $q = s^2 - 3s - 4 = 4 - 6 - 4 = -6$  である。よって  $a, b$  は  $u^2 - 2u - 6 = 0$  の 2 解であるから、 $a < b$  より  $a = 1 - \sqrt{7}$ ,  $b = 1 + \sqrt{7}$  である。

この 2 点における接線の傾きを求める。 $u^2 = 2u + 6$  を満たす点では  $u^3 = u(2u + 6) = 2u^2 + 6u = 10u + 12$  である。したがって

$$\begin{aligned} f'(u) &= 4u^3 - 12u^2 - 16u \\ &= 4(10u + 12) - 12(2u + 6) - 16u \\ &= -24 \end{aligned}$$

である。

また、切片は  $f(u) - uf'(u) = f(u) + 24u$  である。例えば  $u = 1 + \sqrt{7}$  を代入してもよいが、上の関係式を使うと  $f(u) - uf'(u) = -3u^4 + 8u^3 + 8u^2 = -36$  となる。よって求める直線は  $y = -24x - 36$  である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

(1) は導関数の符号を直接整理して極値を確定する。(2) は接線を  $y = mx + c$  とおき、 $f(x) - (mx + c)$  が異なる 2 つの重解をもつことから、2 次式の完全平方として係数比較する。

### 【解答】

(1)

$$f'(x) = 4x(x-4)(x+1)$$

である。したがって  $f'(x)$  の符号は、 $(-\infty, -1)$  で負、 $(-1, 0)$  で正、 $(0, 4)$  で負、 $(4, \infty)$  で正となる。よって

$x = 0$  のとき極大値  $0$ ,

$x = -1$  のとき極小値  $-3$ ,  $x = 4$  のとき極小値  $-128$

である。

(2) 求める接線を  $y = mx + c$  とする。この直線が  $x = a, b$  ( $a < b$ ) で曲線に接するなら、4 次式

$$f(x) - (mx + c)$$

は異なる 2 つの重解  $a, b$  をもつ。 $s = a + b$ ,  $q = ab$  とおけば

$$\begin{aligned} f(x) - (mx + c) &= (x-a)^2(x-b)^2 \\ &= (x^2 - sx + q)^2 \\ &= x^4 - 2sx^3 + (s^2 + 2q)x^2 - 2sqx + q^2 \end{aligned}$$

である。一方、

$$f(x) - (mx + c) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 - mx - c$$

だから、係数比較により

$$-2s = -4, \quad s^2 + 2q = -8, \quad -2sq = -m, \quad q^2 = -c$$

を得る。前 2 式から  $s = 2$ ,  $q = -6$  であり、後 2 式から

$$m = -24, \quad c = -36$$

となる。また  $a, b$  は

$$u^2 - 2u - 6 = 0$$

の 2 根、すなわち  $1 - \sqrt{7}$ ,  $1 + \sqrt{7}$  で、確かに異なる。したがって求める直線は

$$y = -24x - 36$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 24 分。(1) は増減表を省略せず、3 つの停留点で極大・極小の種類を確認する。(2) は傾き・切片を対称式で揃える解法と、2 つの重接点をもつ 4 次式を完全平方として係数比較する解法の 2 通りを収録した。後者は直線を早く求められるが、 $a, b = 1 \mp \sqrt{7}$  が異なる実数である確認まで書く。

## 【第 2 問】

2 四面体  $OABC$  は、 $OA = OB = OC = 1$ ,  $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$  をみたす。辺  $OA$  上の点  $P$  と辺  $OB$  上の点  $Q$  を  $OP = p$ ,  $OQ = q$ ,  $pq = \frac{1}{2}$  となるようにとる。 $p + q = t$  とし、 $\triangle CPQ$  の面積を  $S$  とする。

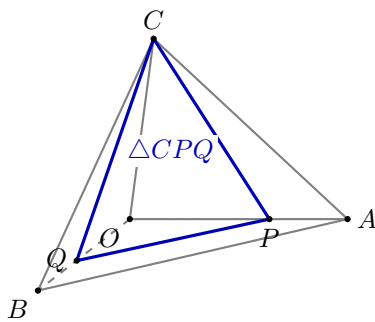
- (1)  $t$  のとり得る値の範囲を求めよ。
- (2)  $S$  を  $t$  で表せ。
- (3)  $S$  の最小値、およびそのときの  $p$ ,  $q$  を求めよ。

## 【方針】

直交する 3 本の辺を座標軸に取り、 $P = (p, 0, 0)$ 、 $Q = (0, q, 0)$ 、 $C = (0, 0, 1)$  と置く。(1) は  $pq = 1/2$  と  $0 \leq p, q \leq 1$  から  $q = 1/(2p)$  として  $p$  の範囲を決め、 $p + q$  の最小・最大を調べる。(2) は  $\triangle CPQ$  の面積を 2 辺の長さで内積から計算し、 $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq$  で  $t$  に直す。(3) は (2) の式が  $t$  の増加関数であることから、(1) の最小の  $t$  を使う。

## 【解答】

準備  $OA, OB, OC$  は互いに直交し、長さがすべて 1 である。そこで  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (1, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, 0)$ ,  $C = (0, 0, 1)$  とおく。このとき  $P = (p, 0, 0)$ ,  $Q = (0, q, 0)$  である。 $P, Q$  は辺上の点で、 $pq = 1/2 > 0$  だから  $0 < p \leq 1$ ,  $0 < q \leq 1$  である。



(1)  $pq = 1/2$  より、相加相乗平均から  $t = p + q \geq 2\sqrt{pq} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$  である。等号は  $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のときに成り立ち、この値は確かに辺上の条件  $0 < p, q \leq 1$  を満たす。

次に最大値を調べる。 $q = 1/(2p)$  と書くと、 $q \leq 1$  より  $\frac{1}{2p} \leq 1$  なので  $p \geq \frac{1}{2}$  である。また  $p \leq 1$  だから  $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$  である。この範囲で  $t = p + \frac{1}{2p}$  とおくと  $\frac{dt}{dp} = 1 - \frac{1}{2p^2}$  であり、 $p = 1/\sqrt{2}$  で最小となる。したがって最大値は端点で調べればよい。 $p = \frac{1}{2}$  のとき  $q = 1$ ,  $p = 1$  のとき  $q = \frac{1}{2}$  で、どちらも  $t = \frac{3}{2}$  である。よって  $\sqrt{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$  である。

(2)  $\vec{CP} = (p, 0, -1)$ ,  $\vec{CQ} = (0, q, -1)$  である。したがって

$$|\vec{CP}|^2 = p^2 + 1, \quad |\vec{CQ}|^2 = q^2 + 1, \quad \vec{CP} \cdot \vec{CQ} = 1$$

である。

三角形の面積を  $S$  とすると

$$S^2 = \frac{1}{4} (|\vec{CP}|^2 |\vec{CQ}|^2 - (\vec{CP} \cdot \vec{CQ})^2)$$

だから

$$\begin{aligned} 4S^2 &= (p^2 + 1)(q^2 + 1) - 1 \\ &= p^2 q^2 + p^2 + q^2 \end{aligned}$$

である。ここで  $pq = \frac{1}{2}$  より  $p^2 q^2 = \frac{1}{4}$  であり、また  $p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = t^2 - 1$  である。したがって  $4S^2 = t^2 - 1 + \frac{1}{4} = t^2 - \frac{3}{4}$  である。面積は正なので  $S = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \frac{3}{4}}$  である。

(3)

(2) で得た式  $S = \frac{1}{2} \sqrt{t^2 - \frac{3}{4}}$  は、今回の範囲  $t > 0$  では  $t$  が小さいほど小さい。したがって  $S$  は (1) の範囲で最小の  $t = \sqrt{2}$  のとき最小となる。

相加相乗平均の等号条件より、このとき  $p = q$  であり、 $pq = 1/2$  と合わせて  $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  である。このとき

$$S_{\min} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

である。よって  $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$  のとき最小値  $\sqrt{5}/4$  をとる。

【総評】 難度 5、計算量 5。目安時間は 20 分。空間図形を座標化して、面積を内積公式で処理する問題である。(1) では  $pq = 1/2$  だけでなく、点が辺上にあるため  $p, q \leq 1$  であることを必ず使う。(2) は内積が 1 になる点を見落としやすい。最後に  $p^2 + q^2 = t^2 - 1$  へ直すと計算が短い。(3) は  $S$  が  $t$  の増加関数であることと、等号条件  $p = q$  を明示すれば十分である。

### 【第 3 問】

3 逆行列をもつ 2 次の正方行列,  $A_1, A_2, A_3, \dots$  が, 関係式

$$A_{n+1}A_n = A_n + 2E \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

をみたすとする。さらに  $A_1 + E$  は逆行列をもつとする。ここで  $E$  は 2 次の単位行列とする。

(1) すべての自然数  $n$  に対して  $A_n + E$  は逆行列をもち,

$$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2} A_n (A_n + E)^{-1}$$

が成立することを示せ。

(2)  $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$  により, 行列  $B_n$  を定める。 $B_{n+1}$  と  $B_n$  との間に成立する関係式を求め,  $B_n$  を  $B_1$  と  $n$  を用いて表せ。

### 【方針】

与式は  $A_n$  が逆行列を持つことを利用して  $A_{n+1} = E + 2A_n^{-1}$  と変形する。(1) はここから  $A_{n+1} + E = 2A_n^{-1}(A_n + E)$  を作り、 $A_n + E$  の可逆性を帰納法で示す。逆行列の式では、 $A_n$  と  $A_n + E$  が可換であるため逆行列とも順序を入れ替えられることを明記する。(2) は  $A_{n+1}$  と (1) の逆行列表示を  $B_{n+1}$  に代入し、 $B_{n+1} = -\frac{1}{2}B_n$  という等比型の関係へ落とす。

### 【解答】

(1)

問題の関係式は  $A_{n+1}A_n = A_n + 2E$  である。 $A_n$  は逆行列を持つので、右から  $A_n^{-1}$  をかけると  $A_{n+1} = E + 2A_n^{-1}$  である。したがって

$$\begin{aligned} A_{n+1} + E &= 2E + 2A_n^{-1} \\ &= 2(E + A_n^{-1}) \\ &= 2A_n^{-1}(A_n + E) \end{aligned}$$

である。

仮定より  $A_1 + E$  は逆行列を持つ。いま  $A_n + E$  が逆行列を持つとすると、 $A_n^{-1}$  も逆行列を持つので、積  $2A_n^{-1}(A_n + E)$  も逆行列を持つ。よって上の式から  $A_{n+1} + E$  も逆行列を持つ。数学的帰納法により、すべての自然数  $n$  について  $A_n + E$  は逆行列を持つ。

さらに  $A_{n+1} + E = 2A_n^{-1}(A_n + E)$  の両辺の逆行列をとると、積の逆行列の順序に注意して  $(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}(A_n + E)^{-1}A_n$  である。ここで  $A_n$  と  $A_n + E$  は可換である。したがって  $A_n$  は  $(A_n + E)^{-1}$  と可換であり  $(A_n + E)^{-1}A_n = A_n(A_n + E)^{-1}$  である。よって  $(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$  が成り立つ。

(2)  $B_n = (2E - A_n)(A_n + E)^{-1}$  である。まず  $A_{n+1} = E + 2A_n^{-1}$  より  $2E - A_{n+1} = E - 2A_n^{-1}$  である。また (1) より

$(A_{n+1} + E)^{-1} = \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1}$  である。したがって

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= (2E - A_{n+1})(A_{n+1} + E)^{-1} \\ &= (E - 2A_n^{-1}) \cdot \frac{1}{2}A_n(A_n + E)^{-1} \\ &= \frac{1}{2}(A_n - 2E)(A_n + E)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}(2E - A_n)(A_n + E)^{-1} \\ &= -\frac{1}{2}B_n \end{aligned}$$

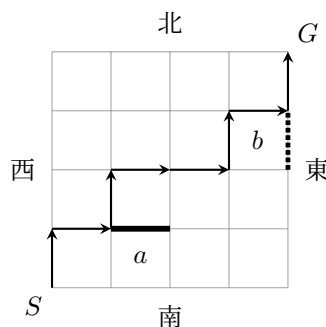
である。

よって  $B_{n+1} = -\frac{1}{2}B_n$  が成り立つ。これを繰り返すと  $B_2 = -\frac{1}{2}B_1$ ,  $B_3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 B_1$ , ... となるので、一般に  $B_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} B_1$  である。

【総評】 難度 7、計算量 6。目安時間は 24 分。行列の逆行列と順序に慣れているかで差がつく問題である。(1) は  $A_{n+1} + E = 2A_n^{-1}(A_n + E)$  を作ることが核心で、可逆性は帰納法で説明する必要がある。逆行列を取るときは積の順序が逆になる点に注意する。一方、 $A_n$  と  $A_n + E$  は可換なので、最後の式で順序を入れ替えてよい理由も書いておくと答案の信頼性が高い。(2) は代入後に  $A_n - 2E = -(2E - A_n)$  を見抜けば短い。

#### 【第 4 問】

4 図のような格子状の道路がある。S 地点を出発して、東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間  $a$  を通り抜けるのに 1 分、点線で描かれた区間  $b$  を通り抜けるのに 8 分、それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば、図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



- (1)  $a$  を通り抜ける経路は何通りあるか。
- (2)  $a$  を通り抜けずに  $b$  を通り抜ける経路は何通りあるか。
- (3) すべての経路から任意に 1 つ選んだとき、S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。

#### ▶ 解法 1

##### 【方針】

図を  $S = (0, 0)$ 、 $G = (4, 4)$  の  $4 \times 4$  格子として読み取る。区間  $a$  は  $(1, 1)$  から  $(2, 1)$  への東向き区間、区間  $b$  は  $(4, 2)$  から  $(4, 3)$  への北向き区間である。各区間を通る経路数は、その区間の始点までの経路数と終点から G までの経路数の積で数える。(3) は全経路 70 通りを等確率とし、通常の 8 区間 16 分を基準に、 $a$  通過で 1 分減、 $b$  通過で 6 分増えると見て期待値を求める。

##### 【解答】

図の格子点を  $S = (0, 0)$ 、 $G = (4, 4)$  とおく。東へ進むことを  $x$  座標を 1 増やすこと、北へ進むことを  $y$  座標を 1 増やすことと見る。S から G までは、東へ 4 回、北へ 4 回、合計 8 回進む。したがって全経路数は  ${}_8C_4 = 70$  通りである。

##### (1)

図より、区間  $a$  は  $(1, 1) \rightarrow (2, 1)$  の東向き区間である。S = (0, 0) から (1, 1) までは、東 1 回、北 1 回の順序を決めればよいので  ${}_2C_1 = 2$  通りである。また、(2, 1) から G = (4, 4) までは、東 2 回、北 3 回、合計 5 回の順序を決めればよいので

で  ${}_5C_2 = 10$  通りである。

したがって  $a$  を通り抜ける経路は  $2 \cdot 10 = 20$  通りである。

(2)

図より、区間  $b$  は  $(4, 2) \rightarrow (4, 3)$  の北向き区間である。

まず  $b$  を通る経路を数える。 $S$  から  $(4, 2)$  までは、東 4 回、北 2 回、合計 6 回の順序を決めればよいから  ${}_6C_2 = 15$  通りである。 $(4, 3)$  から  $G = (4, 4)$  までは北へ 1 回進むだけなので 1 通りである。よって  $b$  を通る経路は 15 通りである。

この中から、 $a$  も通る経路を除く。 $a$  を通ってから  $b$  を通るには、 $(2, 1)$  から  $(4, 2)$  まで東 2 回、北 1 回進む必要がある。この部分は  ${}_3C_1 = 3$  通りである。 $S$  から  $(1, 1)$  までは 2 通りなので、 $a$  と  $b$  の両方を通る経路は  $2 \cdot 3 = 6$  通りである。

したがって、 $a$  を通り抜けずに  $b$  を通り抜ける経路は  $15 - 6 = 9$  通りである。

(3)

すべての区間に 2 分かかるとすれば、どの経路も 8 区間を通るので  $8 \cdot 2 = 16$  分である。

実際には、区間  $a$  は 2 分ではなく 1 分なので、 $a$  を通る経路では基準より 1 分短い。また、区間  $b$  は 2 分ではなく 8 分なので、 $b$  を通る経路では基準より 6 分長い。

全 70 通りの経路を等確率で選ぶので  $P(a \text{ を通る}) = \frac{20}{70}$ ,  $P(b \text{ を通る}) = \frac{15}{70}$  である。ここで  $b$  については、 $a$  を通るかどうかに関係なく、通れば 6 分増えるので 15 通り全体を用いる。

したがって期待値は

$$16 - 1 \cdot \frac{20}{70} + 6 \cdot \frac{15}{70} = 16 - \frac{2}{7} + \frac{9}{7} = 17$$

である。よって 17 分である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

(1)(2) は特殊区間を通る経路数を組合せで求める。(3) は  $a, b$  の通過有無で全 70 経路を 4 群に分け、各群の所要時間を直接加重平均する。

### 【解答】

(1) 全経路は東 4 回・北 4 回を並べる

$${}_8C_4 = 70$$

通りである。区間  $a$  の始点  $(1, 1)$  までが  ${}_2C_1 = 2$  通り、終点  $(2, 1)$  から  $G$  までが  ${}_5C_2 = 10$  通りなので、

$$2 \cdot 10 = 20 \text{ 通り}$$

である。

(2) 区間  $b$  を通る経路は

$${}_6C_2 = 15$$

通りである。このうち  $a$  も通る経路は、 $S$  から  $a$  まで 2 通り、 $a$  の終点から  $b$  の始点まで  ${}_3C_1 = 3$  通りだから

$$2 \cdot 3 = 6$$

通りである。したがって

$$15 - 6 = 9 \text{ 通り}$$

となる。

(3)  $a$  のみを通る経路は  $20 - 6 = 14$  通り、 $b$  のみを通る経路は  $15 - 6 = 9$  通り、両方を通る経路は 6 通り、どちらも通らない経路は

$$70 - (14 + 9 + 6) = 41$$

通りである。通常の 8 区間なら 16 分、 $a$  で 1 分短縮、 $b$  で 6 分増加するから、分布は

| 通過する特殊区間   | 経路数 | 所要時間 |
|------------|-----|------|
| なし         | 41  | 16   |
| $a$ のみ     | 14  | 15   |
| $b$ のみ     | 9   | 22   |
| $a, b$ の両方 | 6   | 21   |

となる。したがって期待値は

$$\frac{41 \cdot 16 + 14 \cdot 15 + 9 \cdot 22 + 6 \cdot 21}{70} = \frac{1190}{70} = 17 \text{ 分}$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 4。目安時間は 20 分。特殊区間を通る経路数は「始点まで」と「終点から先」の積で数える。期待値は基準 16 分からの増減を指示変数で足す解法と、全 70 経路を 4 群へ分類して時間分布を作る解法の 2 通りを収録した。後者は  $a, b$  の両方を通る 6 通りを重複なく扱えるかが要点である。

### 【第 5 問】

5

$$f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{3}} |\sin \theta| d\theta$$

とおく。

- (1)  $f'(x)$  を求めよ。
- (2)  $0 \leq x \leq \pi$  における  $f(x)$  の最大値と最小値、およびそのときの  $x$  を求めよ。

### ▶ 解法 1

#### 【方針】

(1) は積分区間の上端と下端がともに  $x$  に依存しているので、上端の被積分関数から下端の被積分関数を引く。(2) は  $0 \leq x \leq \pi$  で  $\sin x \geq 0$  である一方、 $\sin(x + \pi/3)$  は  $x = 2\pi/3$  で符号が変わることに注意して  $f'(x)$  を区間ごとに調べる。増減が変わる  $x = \pi/3, 5\pi/6$  と端点の値をすべて比較し、最大・最小を決める。

#### 【解答】

(1)

$$f(x) = \int_x^{x+\pi/3} |\sin \theta| d\theta$$

である。積分区間の上端と下端が  $x$  に依存しているので、微分すると

$$f'(x) = \left| \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right| \cdot \frac{d}{dx} \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - |\sin x| \cdot \frac{d}{dx} x$$

である。したがって  $f'(x) = \left| \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right| - |\sin x|$  である。

(2)

以下、 $0 \leq x \leq \pi$  とする。この範囲では  $|\sin x| = \sin x$  である。一方、 $x + \pi/3$  は  $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$  を動く。したがって  $x = 2\pi/3$  を境に、 $\sin(x + \pi/3)$  の符号が変わる。

まず  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$  では  $\sin(x + \pi/3) \geq 0$  だから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin x \\ &= 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

である。よってこの区間では

$$f'(x) > 0 \quad \left( 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \right), \quad f'(x) < 0 \quad \left( \frac{\pi}{3} < x \leq \frac{2\pi}{3} \right)$$

である。

次に  $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \pi$  では  $\sin(x + \pi/3) \leq 0$  だから

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x \\ &= -\left\{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x\right\} \\ &= -\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

である。したがって

$$f'(x) < 0 \quad \left(\frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{6}\right), \quad f'(x) > 0 \quad \left(\frac{5\pi}{6} < x \leq \pi\right)$$

である。

以上より、最大・最小の候補は  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{5\pi}{6}$ ,  $x = \pi$  である。それぞれの値を求める。

まず

$$f(0) = \int_0^{\pi/3} \sin \theta \, d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}$$

である。また

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \sin \theta \, d\theta = [-\cos \theta]_{\pi/3}^{2\pi/3} = 1$$

である。

次に

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \int_{5\pi/6}^{7\pi/6} |\sin \theta| \, d\theta$$

である。この区間は  $\pi$  をまたぐので

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= \int_{5\pi/6}^{\pi} \sin \theta \, d\theta + \int_{\pi}^{7\pi/6} (-\sin \theta) \, d\theta \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。最後に

$$f(\pi) = \int_{\pi}^{4\pi/3} (-\sin \theta) \, d\theta = [\cos \theta]_{\pi}^{4\pi/3} = \frac{1}{2}$$

である。

これらと比較すると  $2 - \sqrt{3} < \frac{1}{2} < 1$  である。よって最大値は  $1$  ( $x = \frac{\pi}{3}$ ) であり、最小値は  $2 - \sqrt{3}$  ( $x = \frac{5\pi}{6}$ ) である。

## ▶ 解法 2

### 【方針】

(1) は積分区間の両端を微分する。(2) は絶対値を外して  $f(x)$  自体を区分的な三角関数として求め、各区間の値域から最大・最小を読む。

### 【解答】

(1) 積分区間の上端・下端をそれぞれ微分して

$$f'(x) = \left| \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \right| - |\sin x|$$

である。

(2)  $0 \leq x \leq 2\pi/3$  では積分区間が  $[0, \pi]$  に含まれるので

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\pi/3} \sin \theta \, d\theta \\ &= \cos x - \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

この区間では  $\pi/6 \leq x + \pi/6 \leq 5\pi/6$  だから、最大値は  $x = \pi/3$  のときの 1 であり、端点での値はともに  $1/2$  である。

$2\pi/3 \leq x \leq \pi$  では積分区間が  $\pi$  をまたぐので

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{\pi} \sin \theta \, d\theta + \int_{\pi}^{x+\pi/3} (-\sin \theta) \, d\theta \\ &= 2 + \cos x + \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \\ &= 2 + \sqrt{3} \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

ここで  $5\pi/6 \leq x + \pi/6 \leq 7\pi/6$  だから、最小値は  $x = 5\pi/6$  のとき

$$2 + \sqrt{3} \cos \pi = 2 - \sqrt{3}$$

であり、この区間の両端では  $1/2$  である。以上より

$$\text{最大値 } 1 \left( x = \frac{\pi}{3} \right), \quad \text{最小値 } 2 - \sqrt{3} \left( x = \frac{5\pi}{6} \right)$$

となる。

【総評】 難度 6、計算量 6。目安時間は 22 分。絶対値つき積分の端点微分から導関数の符号を調べる解法と、 $f(x)$  自体を 2 区間で明示して三角関数の値域を見る解法の 2 通りを収録した。どちらも  $x = 2\pi/3$  で絶対値の外れ方が変わること、最小点では積分区間が  $\pi$  をまたぐことを明示する。