

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2016 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 C 上に点 z がある。 a を実数の定数とし、

$$w = z^2 - 2az + 1$$

とおく。

- (1) $|w|^2$ を z の実部 x と a を用いて表せ。
- (2) 点 z が C 上を一周するとき、 $|w|$ の最小値を a を用いて表せ。

第 2 問

$a > 0$ に対し、関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \int_{-a}^a \left\{ \frac{e^{-x}}{2a} + f(t) \sin t \right\} dt$$

をみたすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0 < a \leq 2\pi$ において、

$$g(a) = \int_{-a}^a f(t) \sin t dt$$

の最小値とそのときの a の値を求めよ。

第 3 問

机のひきだし A に 3 枚のメダル、ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金、銀、銅のどれかであり、ひきだし B の各メダルの色は金、銀のどちらかである。

- (1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。
- (2) ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。
- (3) ひきだし A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき、ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

第 4 問

(1) 次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \cdots \cdots (*)$$

(2) 方程式 $(*)$ の 3 つの実数解を s, t, u とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)} + \frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)} + \frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)} (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定める。このとき,

$$a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0 (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(3) (2) の a_n がすべて整数であることを示せ。

第 5 問

空間の 2 点 $A(0, 0, 2)$, $B(0, 1, 3)$ を通る直線を l とし, 2 点 $C(1, 0, 0)$, $D(1, 0, 1)$ を通る直線を m とする。 a を定数として, l 上にも m 上にもない点 $P(s, t, a)$ を考える。

(1) P から l に下ろした垂線と l の交点を Q とし, P から m に下ろした垂線と m の交点を R とする。 Q , R の座標をそれぞれ s, t, a を用いて表せ。

(2) P を中心とし, l と m がともに接するような球面が存在するための条件を s, t, a の関係式で表せ。

(3) s, t と定数 a が (2) の条件をみたすとき, 平面上の点 (s, t) の軌跡が放物線であることを示し, その焦点と準線を a を用いて表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)