

入 学 試 験 問 題

数 学



北 海 道 大 学 2017 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

3 辺の長さが 5、6、7 の三角形を T とする。

(問 1) T の面積を求めよ。

(問 2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ。ただし、直三角柱のすべての側面は底面と垂直である。

第 2 問

n を自然数とする。

(問 1) 0 でない複素数 z に対し、二項定理を用いて

$$(z + z^{-1})^{2n}$$

を展開せよ。

(問 2) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおき、問 1 の展開式を用いて

$$(2 \cos \theta)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k \cos\{2(n-k)\theta\}$$

を示せ。

(問 3)

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2n} d\theta = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$$

を示せ。

第 3 問

実数 c に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(問 1) $c \geq 0$ とする。すべての n に対して $a_n \geq 0$ が成り立つことを示し、一般項を求めよ。

(問 2) $c < 0$ とする。すべての n に対して $a_n < 0$ となる c の範囲を求めよ。

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ が収束する c の範囲を求めよ。

第 4 問

a, b を実数とし、放物線

$$Q: y = (x - a)^2 + b$$

と直線

$$l: y = x - 1$$

を考える。 Q と l は共有点をもたないか、または 1 点で接しているとする。

(問 1) a, b の満たす条件を求めよ。

(問 2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とする。また、 Q 上の点 B における接線が、点 C において l と垂直に交わるとする。3 点 A, B, C の座標を a, b を用いて表せ。

(問 3) さらに

$$a \geq 0, \quad b \leq 2, \quad b \leq 2a + 1$$

を満たすとき、 $\triangle ABC$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)