

北海道大学 2017 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

3 辺の長さが 5, 6, 7 の三角形を T とする。(問 1) T の面積を求めよ。(問 2) T を底面とする高さ 4 の直三角柱の内部に含まれる球の半径の最大値を求めよ。ただし、直三角柱のすべての側面は底面と垂直である。

▶ 解法 1

【方針】

(1) はヘロンの公式で底面三角形の面積を出す。(2) は三角柱内の球の中心を底面に射影すると、射影点から三角形の各辺までの距離が球の半径以上必要になるため、半径は底面三角形の内接円半径を超えられない。また高さ 4 なので上下の面から半径は高々 2 である。この 2 つの小さい方が最大半径になる。

【解答】

(1) 三角形の 3 辺は 5, 6, 7 である。半周長を s とすると $s = \frac{5+6+7}{2} = 9$ である。ヘロンの公式より面積は $\sqrt{s(s-5)(s-6)(s-7)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$ である。

(2) 底面三角形の内接円半径を ρ とする。面積は $\frac{1}{2}\rho(5+6+7) = 9\rho$ とも表せるので、(1) より $9\rho = 6\sqrt{6}$ したがって $\rho = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ である。

三角柱の内部に半径 R の球が含まれるとする。球の中心を底面に正射影した点から、底面三角形の各辺までの距離は少なくとも R でなければならない。したがって $R \leq \rho$ である。また柱の高さは 4 なので、上下の底面からの距離を考えると $R \leq 2$ である。よって $R \leq \min\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 2\right) = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ である。

実際、底面三角形の内心の真上で、高さ 2 の点を中心に半径 $2\sqrt{6}/3$ の球を置けば、側面にも上下の底面にも収まる。したがって最大半径は $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

面積は余弦定理で一つの角の正弦を求めて計算する。球を底面へ正射影すると、半径は底面三角形の内接円半径以下である。上下方向の制約とも比較し、実現配置を示す。

【解答】

(問 1)

長さ 5 と 6 の辺のなす角を θ とする。余弦定理より

$$7^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cos \theta,$$

したがって

$$\cos \theta = \frac{1}{5}, \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

よって面積は

$$[T] = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{5} = 6\sqrt{6}.$$

(問 2)

底面三角形の内接円半径を r とすると

$$6\sqrt{6} = \frac{1}{2}(5+6+7)r = 9r.$$

よって

$$r = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

三角柱内の球を底面に正射影すると、中心の射影から各辺までの距離は球の半径 R 以上でなければならない。したがって

$$R \leq \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

また上下の底面の間隔は 4 なので

$$R \leq 2.$$

ここで $2\sqrt{6}/3 < 2$ である。底面の内心の真上、高さ 2 の点を中心とすれば半径 $2\sqrt{6}/3$ の球を実際に置ける。よって最大半径は

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

【総評】 難度 4、計算量 3。想定時間は 14 分程度。ヘロンの公式と余弦定理の 2 通りで面積 $6\sqrt{6}$ を照合した。球の半径は底面方向の上限 $2\sqrt{6}/3$ と高さ方向の上限 2 の小さい方であり、内心の真上に中心を置く実現可能性まで確認する。

【第 2 問】

n を自然数とする。

(問 1) 0 でない複素数 z に対し、二項定理を用いて

$$(z + z^{-1})^{2n}$$

を展開せよ。

(問 2) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおき、問 1 の展開式を用いて

$$(2 \cos \theta)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k \cos\{2(n-k)\theta\}$$

を示せ。

(問 3)

$$\int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2n} d\theta = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$$

を示せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は二項定理で $(z + z^{-1})^{2n}$ を展開し、指数を $2n - 2k$ に整理する。(2) は $|z| = 1$ のとき $z^{-1} = \bar{z}$ 、 $z + z^{-1} = 2 \cos \theta$ であり、各項の実部が $\cos(2(n-k)\theta)$ になることを使う。(3) は両辺を積分し、 $k = n$ 以外の余弦項の積分が 0 になることを示す。

【解答】

(1) 二項定理より $(z + z^{-1})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k z^{2n-k} (z^{-1})^k$ である。指数をまとめると $(z + z^{-1})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k z^{2n-2k}$ となる。

(2) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと $|z| = 1$ であり、 $z^{-1} = \cos \theta - i \sin \theta$ である。したがって $z + z^{-1} = 2 \cos \theta$ である。また整数 m について、 z^m の実部は $\cos m\theta$ である。

(1) の両辺に $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を代入して実部を比較すると

$$(2 \cos \theta)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k \cos(2n - 2k)\theta$$

すなわち

$$(2 \cos \theta)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k \cos(2(n-k)\theta)$$

を得る。これは問題の等式である。

(3) (2) の等式を $0 \leq \theta \leq \pi/2$ で積分する。左辺は

$$2^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta$$

である。右辺について、 $k \neq n$ のとき

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2(n-k)\theta) d\theta = \left[\frac{\sin(2(n-k)\theta)}{2(n-k)} \right]_0^{\pi/2} = 0$$

である。 $k = n$ のときだけ

$$\int_0^{\pi/2} 1 d\theta = \frac{\pi}{2}$$

が残る。したがって

$$2^{2n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta = {}_{2n}C_n \frac{\pi}{2}$$

である。よって

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{{}_{2n}C_n \pi}{2^{2n+1}}$$

であり、 ${}_{2n}C_n = (2n)!/(n!)^2$ より

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

問 1・問 2 は共役な冪を組にして実部をとる。問 3 は前問とは独立に部分積分からウォリス型漸化式を導き、積を階乗へ直して同じ公式を確認する。

【解答】

(問 1)

二項定理より

$$(z + z^{-1})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k z^{2n-2k}.$$

(問 2)

$|z| = 1$ なので $z^{-1} = \bar{z}$ であり

$$z + z^{-1} = 2 \cos \theta.$$

またド・モアブルの定理より

$$\operatorname{Re}(z^{2n-2k}) = \cos\{2(n-k)\theta\}.$$

問 1 の両辺の実部をとれば

$$(2 \cos \theta)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}C_k \cos\{2(n-k)\theta\}.$$

(問 3)

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta$$

とおく。部分積分により

$$\begin{aligned} I_n &= (2n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^{2n-2} \theta d\theta \\ &= (2n-1)(I_{n-1} - I_n). \end{aligned}$$

したがって

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

$I_0 = \pi/2$ なので

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

ここで

$$1 \cdot 3 \cdots (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}, \quad 2 \cdot 4 \cdots 2n = 2^n n!$$

であるから

$$I_n = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n+1} (n!)^2}.$$

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 22 分程度。複素数展開では指数 $2n-2k$ と角 $2(n-k)\theta$ を対応させる。問 3 は展開の定数項だけを残す方法と、部分積分による漸化式の 2 通りで公式を照合した。定積分は独立表示し、階乗変形も省略しない。

【第 3 問】

実数 c に対して、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}|a_n| + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(問 1) $c \geq 0$ とする。すべての n に対して $a_n \geq 0$ が成り立つことを示し、一般項を求めよ。

(問 2) $c < 0$ とする。すべての n に対して $a_n < 0$ となる c の範囲を求めよ。

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ が収束する c の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$a_n \geq 0$ のときは $a_{n+1} = a_n/2 + 1$ 、 $a_n < 0$ のときは $a_{n+1} = 3a_n/2 + 1$ になる。(1) は非負性が保たれることを帰納的に示し、不動点 2 を引いて一般項を出す。(2) は負の側の式で不動点 -2 を引き、全項負となる条件を調べる。(3) は $-2 < c < 0$ では有限回で非負側へ移ることを示す。

【解答】

(1) $c \geq 0$ とする。 $a_n \geq 0$ なら $|a_n| = a_n$ なので $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n + 1 = \frac{1}{2}a_n + 1$ である。右辺は正であるから、 $a_1 = c \geq 0$ より帰納的にすべての n で $a_n \geq 0$ が成り立つ。

このとき $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$ である。 $a_1 = c$ だから $a_n - 2 = (c - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり、 $a_n = 2 + \frac{c-2}{2^{n-1}}$ である。

(2) $c < 0$ とする。すべての項が負である間は $|a_n| = -a_n$ なので $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n + 1 = \frac{3}{2}a_n + 1$ である。したがって $a_{n+1} + 2 = \frac{3}{2}(a_n + 2)$ であり、負の状態が続く限り $a_n = -2 + (c+2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ となる。

すべての n で $a_n < 0$ となるためには、右辺がすべて負でなければならない。もし $c+2 > 0$ 、すなわち $-2 < c < 0$ なら、 $(3/2)^{n-1}$ が大きくなるため右辺はやがて 0 以上になる。したがって不適である。一方、 $c+2 \leq 0$ なら $a_n = -2 + (c+2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq -2 < 0$ で、すべて負である。よって求める条件は $c \leq -2$ である。

(3) $c \geq 0$ のときは (1) より $a_n = 2 + \frac{c-2}{2^{n-1}}$ なので $a_n \rightarrow 2$ である。 $c = -2$ のときは漸化式から $a_n = -2$ が続くので収束する。 $-2 < c < 0$ のとき、負の間は $a_n = -2 + (c+2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ である。ここで $c+2 > 0$ なので、右辺はやがて 0 以上になる。いったん $a_n \geq 0$ になれば、その後は (1) と同じ形で非負性が保たれ、2 に収束する。 $c < -2$ のときは、(2) と同じ式で $a_n = -2 + (c+2)\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ がすべての n で成り立ち、 $c+2 < 0$ だから $a_n \rightarrow -\infty$ である。したがって収束しない。

以上より、数列 $\{a_n\}$ が収束する条件は $c \geq -2$ である。

▶ 解法 2

【方針】

写像 $\Phi(x) = x - |x|/2 + 1$ を、非負側と負側の二つの一次写像として調べる。各側の不動点 2 と -2 との差が次の項で何倍になるかを見れば、不変領域・脱出・発散が一度に分かる。

【解答】

漸化式を写像で書くと

$$a_{n+1} = \Phi(a_n), \quad \Phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1, & x \geq 0, \\ \frac{3}{2}x + 1, & x < 0. \end{cases}$$

(問 1)

$x \geq 0$ なら $\Phi(x) \geq 1$ なので、非負の領域はその後も保たれる。また

$$a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2).$$

したがって

$$a_n = 2 + \frac{c-2}{2^{n-1}}.$$

(問 2)

負の領域にいる間は

$$a_{n+1} + 2 = \frac{3}{2}(a_n + 2).$$

よって

$$a_n = -2 + (c+2) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}.$$

$c \leq -2$ なら右辺は常に負である。逆に $-2 < c < 0$ なら正の項 $(c+2)(3/2)^{n-1}$ が増大し、有限回で 0 以上になる。したがって

$$c \leq -2.$$

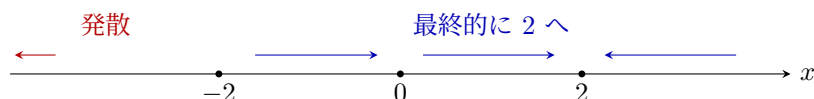
(問 3)

$c \geq 0$ では問 1 より $a_n \rightarrow 2$ である。 $-2 < c < 0$ では有限回で非負側へ移り、その後は 2 へ収束する。 $c = -2$ では全項が -2 である。一方 $c < -2$ では

$$a_n = -2 + (c+2) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \rightarrow -\infty.$$

よって収束条件は

$$c \geq -2.$$



【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 22 分程度。非負側では不動点 2 との差が半分、負側では不動点 -2 との差が $3/2$ 倍になる。場合分けによる一般項と写像の相図の 2 通りで、全項負の条件 $c \leq -2$ と収束条件 $c \geq -2$ を確認した。

【第 4 問】

a, b を実数とし、放物線

$$Q: y = (x - a)^2 + b$$

と直線

$$l: y = x - 1$$

を考える。 Q と l は共有点をもたないか、または 1 点で接しているとする。

(問 1) a, b の満たす条件を求めよ。

(問 2) Q 上の点のうち l までの距離が最小となるものを A とする。また、 Q 上の点 B における接線が、点 C において l と垂直に交わるとする。3 点 A, B, C の座標を a, b を用いて表せ。

(問 3) さらに

$$a \geq 0, \quad b \leq 2, \quad b \leq 2a + 1$$

を満たすとき、 $\triangle ABC$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

問 1 では交点方程式の判別式を正確に展開する。問 2 では放物線が直線の上側にあることを使い、鉛直差を最小化して A を求める。 B は接線の傾きが -1 となる点である。問 3 では面積を $d = b - a$ の一次式にし、制約を d の上下限へ翻訳する。

【解答】

(問 1)

交点の x 座標は

$$(x - a)^2 + b = x - 1$$

を満たす。整理すると

$$x^2 - (2a + 1)x + a^2 + b + 1 = 0$$

である。共有点が高々 1 個であるための必要十分条件は、判別式が 0 以下となることである。したがって

$$\begin{aligned} D &= (2a + 1)^2 - 4(a^2 + b + 1) \\ &= 4a - 4b - 3 \leq 0. \end{aligned}$$

よって

$$b \geq a - \frac{3}{4}$$

である。

(問 2)

Q 上の点 $X = (x, (x - a)^2 + b)$ と、同じ x 座標をもつ l 上の点との鉛直差を

$$g(x) = (x - a)^2 + b - (x - 1)$$

とおく。問 1 の条件により $g(x) \geq 0$ であり、点 X から l までの距離は $g(x)/\sqrt{2}$ である。

$$g'(x) = 2(x - a) - 1$$

より、距離が最小となるのは $x = a + 1/2$ のときである。したがって

$$A \left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{4} \right).$$

Q の接線の傾きは $2(x - a)$ である。 l と垂直な接線の傾きは -1 なので

$$2(x - a) = -1.$$

よって

$$B \left(a - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{4} \right).$$

この点における接線は

$$y = -x + a + b - \frac{1}{4}$$

であり、 $y = x - 1$ と連立して

$$C\left(\frac{a+b}{2} + \frac{3}{8}, \frac{a+b}{2} - \frac{5}{8}\right)$$

を得る。

(問 3)

$AB = 1$ であり、点 C から直線 AB までの距離は

$$\left(b + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{a+b}{2} - \frac{5}{8}\right) = \frac{b-a}{2} + \frac{7}{8}$$

である。したがって面積 S は

$$S = \frac{b-a}{4} + \frac{7}{16}.$$

$d = b - a$ とおく。制約は

$$d \geq -\frac{3}{4}, \quad d \leq 2 - a, \quad d \leq a + 1, \quad a \geq 0$$

となる。最小値 $d = -3/4$ は、たとえば $(a, b) = (0, -3/4)$ で実現する。よって

$$S_{\min} = -\frac{3}{16} + \frac{7}{16} = \frac{1}{4}.$$

一方、 d の上限 $\min(2 - a, a + 1)$ は

$$2 - a = a + 1$$

となる $a = 1/2$ で最大となり、その値は $3/2$ である。これは $(a, b) = (1/2, 2)$ で実現する。したがって

$$S_{\max} = \frac{3}{8} + \frac{7}{16} = \frac{13}{16}.$$

▶ 解法 2

【方針】

問 1・問 2 は接線の位置関係で幾何的に処理する。 l と平行な接線の接点が A 、垂直な接線の接点が B である。問 3 は (a, b) 平面に許容領域と等面積直線 $b - a = \text{一定}$ を描き、接する位置から最値を読む。

【解答】

(問 1)

放物線と直線が交わらないか接するためには、放物線 Q が直線 l の上側にあればよい。両者の鉛直差は

$$(x-a)^2 + b - (x-1) = \left(x-a-\frac{1}{2}\right)^2 + b-a + \frac{3}{4}.$$

これがすべての実数 x で非負となる条件は

$$b - a + \frac{3}{4} \geq 0,$$

すなわち

$$b \geq a - \frac{3}{4}$$

である。

(問 2)

Q と l の距離が最短となる点では、 Q の接線が l と平行である。よって接線の傾きを 1 として

$$2(x-a) = 1$$

を解けば

$$A\left(a + \frac{1}{2}, b + \frac{1}{4}\right)$$

を得る。

また B では接線が l と垂直なので

$$2(x - a) = -1.$$

したがって

$$B\left(a - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{4}\right).$$

接線 $y = -x + a + b - 1/4$ と l の交点を求めると

$$C\left(\frac{a+b}{2} + \frac{3}{8}, \frac{a+b}{2} - \frac{5}{8}\right).$$

(問 3)

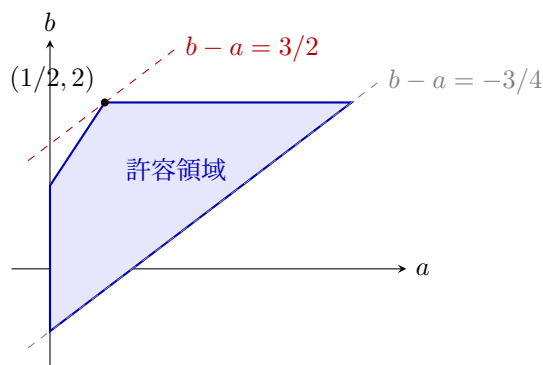
底辺を AB とすると

$$S = \frac{b-a}{4} + \frac{7}{16}.$$

許容領域は

$$a \geq 0, \quad a - \frac{3}{4} \leq b \leq 2, \quad b \leq 2a + 1$$

である。次の図で、 $b - a$ は傾き 1 の直線を平行移動したときの切片に等しい。



最小切片は $-3/4$ 、最大切片は $3/2$ であるから

$$S_{\min} = \frac{1}{4}, \quad S_{\max} = \frac{13}{16}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 28 分程度。判別式は $4a - 4b - 3$ であり、条件は $b \geq a - 3/4$ となる。符号の誤りは面積の最小値まで変えてしまうため、平方完成でも照合した。面積を $b - a$ の一次式へ落とし、最小値 $1/4$ 、最大値 $13/16$ の実現点も確認する。