

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2017 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(問 1) 自然数 a, n, k に対して

$$n(n+1) + a = (n+k)^2$$

が成り立つとき

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ。

(問 2) $n(n+1) + 14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

第 2 問

関数

$$f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$$

について、次の問いに答えよ。

(問 1) $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。

(問 2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(問 3)

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

を求めよ。

第 3 問

複素数平面上に、原点 O と 2 点 A, B を頂点とする三角形 OAB がある。その外心を P とする。点 A, B, P を表す複素数をそれぞれ α, β, z とし、

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする。

(問 1) α の満たす条件を求め、点 $A(\alpha)$ の軌跡を図示せよ。

(問 2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。

第 4 問

さいころを続けて投げ、数直線上の点 P を移動させる。初め P は原点にあり、さいころを投げるたびに目だけ正の向きへ移動する。点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。 n 回目の試行で初めて終了する確率を p_n とする。

(問 1)

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

となることを示せ。

(問 2) p_9 を求めよ。

(問 3) p_3 を求めよ。

第 5 問

座標平面上の 3 点

$$A(1, 0), \quad B(3, 1), \quad C(2, 2)$$

を頂点とする三角形の内部と境界を T とする。実数 a に対して

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a$$

を満たす点 P の全体を D とする。

(問 1) D が少なくとも 1 点を含むための a の範囲を求めよ。

(問 2) D が T を含むための a の範囲を求めよ。

(問 3) 問 1 の条件のもとで、 D が T に含まれるための a の範囲を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)