

北海道大学 2017 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(問 1) 自然数 a, n, k に対して

$$n(n+1) + a = (n+k)^2$$

が成り立つとき

$$a \geq k^2 + 2k - 1$$

が成り立つことを示せ。

(問 2) $n(n+1) + 14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

平方数を $(n+k)^2$ と表し、 $a = (2k-1)n + k^2$ を得る。 $n \geq 1$ 、 $k \geq 1$ から下限 $k^2 + 2k - 1$ を示す。(2) では $a = 14$ として $k = 1, 2, 3$ だけを調べ、自然数 n が出る候補だけを残す。

【解答】

(1) $n(n+1) + a = (n+k)^2$ より $a = (n+k)^2 - n(n+1) = (2k-1)n + k^2$ である。 k は自然数なので $2k-1 > 0$ 、また $n \geq 1$ である。したがって $a = (2k-1)n + k^2 \geq (2k-1) + k^2 = k^2 + 2k - 1$ が成り立つ。

(2) $n(n+1) + 14$ が平方数であるとする。平方根は n より大きい自然数なので、ある自然数 k により $n(n+1) + 14 = (n+k)^2$ と書ける。(1) より $14 \geq k^2 + 2k - 1$ である。 $k = 1, 2, 3, 4$ で右辺はそれぞれ 2, 7, 14, 23 なので、可能性は $k = 1, 2, 3$ である。

また $14 = (2k-1)n + k^2$ である。 $k = 1$ では $14 = n + 1$ より $n = 13$ 。 $k = 2$ では $14 = 3n + 4$ より $n = 10/3$ であり自然数でない。 $k = 3$ では $14 = 5n + 9$ より $n = 1$ である。したがって求める自然数は $n = 1, 13$ である。

▶ 解法 2

【方針】

平方根を m として差 $k = m - n$ を導入し、 $n = (14 - k^2)/(2k - 1)$ を得る。分子が正となる範囲で k を絞り、自然数になるものだけを残す。

【解答】

(問 1)

与式を整理すると

$$a = (2k-1)n + k^2.$$

 $n, k \geq 1$ より

$$(2k-1)n \geq 2k-1$$

なので

$$a \geq k^2 + 2k - 1.$$

(問 2)

平方根は n より大きいから、ある自然数 k により

$$n(n+1) + 14 = (n+k)^2$$

と書ける。よって

$$n = \frac{14 - k^2}{2k - 1}.$$

$n > 0$ より $k^2 < 14$ であるから $k = 1, 2, 3$ を調べる。

k	n
1	13
2	10/3
3	1

自然数となるのは $k = 1, 3$ の場合であり、どちらも元の式を満たす。したがって

$$n = 1, 13.$$

【総評】 難度 4、計算量 3。想定時間は 12 分程度。平方根と n の差を k とおき、問 2 では $k = 1, 2, 3$ を漏れなく調べる。
 $k = 2$ は $n = 10/3$ で除外され、答え $n = 1, 13$ は代入でも確認した。

【第 2 問】

関数

$$f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$$

について、次の問いに答えよ。

(問 1) $0 \leq x \leq 2\pi$ における増減を調べ、最大値と最小値を求めよ。

(問 2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(問 3)

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

導関数 $f'(x) = x \sin x$ から、 $[0, \pi]$ で増加、 $[\pi, 2\pi]$ で減少と分かる。絶対値積分では、単調性と $f(3\pi/2) = 0$ により零点が 1 つだけであることを確認し、そこで正負を分ける。不定積分 $F(x) = x - x \sin x - 2 \cos x$ を用いて面積を計算する。

【解答】

(1) $f(x) = 1 + \sin x - x \cos x$ であるから、 $f'(x) = \cos x - (\cos x - x \sin x) = x \sin x$ である。 $0 < x < \pi$ では $x > 0$ かつ $\sin x > 0$ なので $f'(x) > 0$ 、 $\pi < x < 2\pi$ では $\sin x < 0$ なので $f'(x) < 0$ である。したがって $f(x)$ は $[0, \pi]$ で増加し、 $[\pi, 2\pi]$ で減少する。

端点と山の値は $f(0) = 1$, $f(\pi) = 1 + \pi$, $f(2\pi) = 1 - 2\pi$ である。よって最大値は $1 + \pi$ 最小値は $1 - 2\pi$ である。

(2) 部分積分を用いると

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x$$

である。したがって

$$\int f(x) dx = \int (1 + \sin x - x \cos x) dx = x - \cos x - (x \sin x + \cos x) + C$$

より

$$\int f(x) dx = x - x \sin x - 2 \cos x + C$$

である。

(3) (1) より $[0, \pi]$ では $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$ である。また $[\pi, 2\pi]$ では単調減少し、 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 1 - \frac{3\pi}{2} \cdot 0 = 0$ である。したがって $f(x) \geq 0$ は $0 \leq x \leq 3\pi/2$ 、 $f(x) \leq 0$ は $3\pi/2 \leq x \leq 2\pi$ で成り立つ。 $F(x) = x - x \sin x - 2 \cos x$ とおくと、(2) より $F'(x) = f(x)$ である。値を計算すると

$$F(0) = -2, \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi, \quad F(2\pi) = 2\pi - 2$$

である。よって

$$\int_0^{2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x) dx$$

$$= \{3\pi - (-2)\} - \{(2\pi - 2) - 3\pi\} = 4\pi + 4 \text{ である。}$$

▶ 解法 2

【方針】

導関数 $x \sin x$ の符号表で零点の位置まで確定する。不定積分は $x \sin x + 2 \cos x$ の微分を逆向きに読む。絶対値積分は符号付き全積分から負の部分の 2 回差し引く。

【解答】

(問 1)

$$f'(x) = x \sin x.$$

したがって f は $[0, \pi]$ で増加し、 $[\pi, 2\pi]$ で減少する。値は

$$f(0) = 1, \quad f(\pi) = 1 + \pi, \quad f(2\pi) = 1 - 2\pi.$$

よって最大値は $1 + \pi$ 、最小値は $1 - 2\pi$ である。

(問 2)

$$\frac{d}{dx} \{x \sin x + 2 \cos x\} = x \cos x - \sin x$$

であるから

$$\int f(x) dx = x - x \sin x - 2 \cos x + C.$$

(問 3)

$[0, \pi]$ では $f > 0$ であり、 $[\pi, 2\pi]$ では単調減少する。さらに

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

なので、負となるのは $3\pi/2 < x \leq 2\pi$ だけである。原始関数を

$$F(x) = x - x \sin x - 2 \cos x$$

とおくと

$$F(0) = -2, \quad F\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3\pi, \quad F(2\pi) = 2\pi - 2.$$

符号付き全積分は

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 2\pi$$

であり、負の部分の積分は

$$\int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x) dx = -\pi - 2.$$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f(x)| dx &= 2\pi - 2(-\pi - 2) \\ &= 4\pi + 4. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 20 分程度。 $f'(x) = x \sin x$ により増減と零点の一意性を同時に確定する。積分はすべて独立表示し、絶対値積分は区間分割と「全積分から負部分を 2 回引く」方法で $4\pi + 4$ を照合した。

【第 3 問】

複素数平面上に、原点 O と 2 点 A, B を頂点とする三角形 OAB がある。その外心を P とする。点 A, B, P を表す複素数をそれぞれ α, β, z とし、

$$\alpha\beta = z$$

が成り立つとする。

(問 1) α の満たす条件を求め、点 $A(\alpha)$ の軌跡を図示せよ。

(問 2) 点 $P(z)$ の存在範囲を求め、複素数平面上に図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

外心条件を $|z| = |z - \alpha| = |z - \beta|$ と書き、 $z = \alpha\beta$ を代入して $|\alpha| = |\alpha - 1|$ 、 $|\beta| = |\beta - 1|$ を得る。よって α, β はともに実部 $1/2$ の直線上にある。 $\alpha = 1/2 + ui$ 、 $\beta = 1/2 + vi$ において $z = \alpha\beta$ の実部・虚部を計算し、 $u \neq v$ による境界除外まで確認する。

【解答】

(1) 点 $P(z)$ は三角形 OAB の外心なので $|z| = |z - \alpha| = |z - \beta|$ である。また仮定より $z = \alpha\beta$ である。 B は原点 O と異なるので $\beta \neq 0$ である。そこで $|z| = |z - \beta|$ に $z = \alpha\beta$ を代入すると $|\alpha\beta| = |\alpha\beta - \beta| = |\beta||\alpha - 1|$ となる。 $|\beta| \neq 0$ で割って $|\alpha| = |\alpha - 1|$ を得る。

これは点 $A(\alpha)$ が複素数平面上の 2 点 $0, 1$ から等距離にあることを表す。したがって A は線分 $[0, 1]$ の垂直二等分線上にあり、 $\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}$ を満たす。すなわち $\alpha = \frac{1}{2} + ui$ である。ただし u は実数である。点 A の軌跡は、実部が $1/2$ である直線である。

(2) 同様に $|z| = |z - \alpha|$ に $z = \alpha\beta$ を代入すると $|\beta| = |\beta - 1|$ である。よって $\alpha = \frac{1}{2} + ui$ 、 $\beta = \frac{1}{2} + vi$ とおける。三角形 OAB が退化しないためには $A \neq B$ であり、この表示では $u \neq v$ である。

このとき

$$z = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2} + ui\right) \left(\frac{1}{2} + vi\right) = \left(\frac{1}{4} - uv\right) + \frac{u+v}{2}i$$

である。 $z = X + Yi$ と書くと $Y = \frac{u+v}{2}$ 、 $X = \frac{1}{4} - uv$ である。和 $u+v = 2Y$ を固定すると、2 つの実数 u, v について $uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = Y^2$ であり、等号は $u = v$ のときに限る。ここでは $u \neq v$ なので $uv < Y^2$ である。したがって $X = \frac{1}{4} - uv > \frac{1}{4} - Y^2$ を得る。

逆に、 $X > 1/4 - Y^2$ を満たす点 $X + Yi$ に対しては、和 $2Y$ 、積 $1/4 - X$ をもつ相異なる 2 実数 u, v を選べる。よって点 $P(z)$ の存在範囲は $X > \frac{1}{4} - Y^2$ で表される領域である。境界の放物線 $X = 1/4 - Y^2$ は含まない。

別解。外心 $P(z)$ を中心とし原点を通る円は、任意の点 w について $|w - z| = |z|$ すなわち $|w|^2 = 2\operatorname{Re}(w\bar{z})$ で表される。ここに $w = \alpha$ 、 $z = \alpha\beta$ を代入すると

$$|\alpha|^2 = 2\operatorname{Re}(\alpha\overline{\alpha\beta}) = 2|\alpha|^2\operatorname{Re}\bar{\beta}$$

であり、 $\alpha \neq 0$ より $\operatorname{Re}\beta = 1/2$ を得る。同様に $w = \beta$ から $\operatorname{Re}\alpha = 1/2$ が出る。以後は主解と同じく $\alpha = 1/2 + ui$ 、 $\beta = 1/2 + vi$ と置いて範囲を求めればよい。

▶ 解法 2

【方針】

原点を通り中心が z の円を $|w|^2 = 2\operatorname{Re}(w\bar{z})$ と表す。ここへ $w = \alpha, \beta$ と $z = \alpha\beta$ を代入して両点の実部を直接決める。最後は和と積をもつ相異なる 2 実数の判別式で z の範囲を得る。

【解答】

(問 1)

外接円は中心 z で原点を通るから、円上の複素数 w は

$$|w - z| = |z|$$

を満たす。平方して整理すると

$$|w|^2 = 2\operatorname{Re}(w\bar{z}).$$

ここに $w = \beta, z = \alpha\beta$ を代入する。

$$|\beta|^2 = 2\operatorname{Re}(\beta\overline{\alpha\beta}) = 2|\beta|^2\operatorname{Re}\alpha.$$

$\beta \neq 0$ より

$$\operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}.$$

したがって点 A の軌跡は直線 $X = 1/2$ である。

(問 2)

同様に $w = \alpha$ を代入すると

$$\operatorname{Re}\beta = \frac{1}{2}.$$

よって実数 u, v を用いて

$$\alpha = \frac{1}{2} + ui, \quad \beta = \frac{1}{2} + vi$$

と書ける。三角形が退化しない条件は $u \neq v$ である。

$$z = \alpha\beta = \left(\frac{1}{4} - uv\right) + \frac{u+v}{2}i.$$

$z = X + Yi$ とおけば、 u, v は

$$t^2 - 2Yt + \left(\frac{1}{4} - X\right) = 0$$

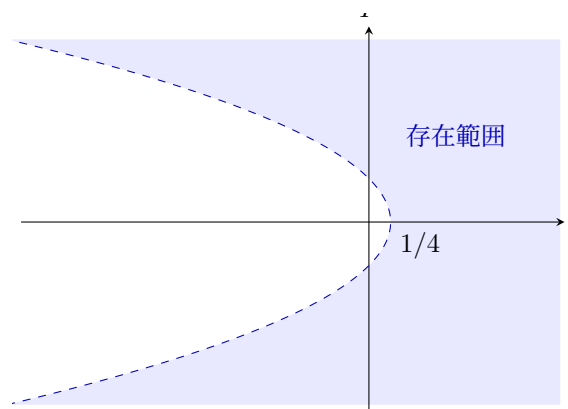
の相異なる 2 実根である。判別式が正である条件は

$$(2Y)^2 - 4\left(\frac{1}{4} - X\right) > 0,$$

すなわち

$$X > \frac{1}{4} - Y^2.$$

逆にこの不等式が成り立てば相異なる実根 u, v が存在するので十分でもある。



境界の放物線 $X = 1/4 - Y^2$ は含まない。

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 26 分程度。距離の等式と外接円の方程式の 2 経路から $\operatorname{Re} \alpha = \operatorname{Re} \beta = 1/2$ を得た。点 P の存在範囲は

$$X > \frac{1}{4} - Y^2$$

であり、境界を除く理由は $u = v$ で三角形が退化するためである。必要性だけでなく逆向きの構成も確認した。

【第 4 問】

さいころを続けて投げ、数直線上の点 P を移動させる。初め P は原点にあり、さいころを投げるたびに出た目だけ正の向きへ移動する。点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。 n 回目の試行で初めて終了する確率を p_n とする。

(問 1)

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$$

となることを示せ。

(問 2) p_9 を求めよ。

(問 3) p_3 を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

終了するには、直前までの合計が 10 未満で、最後の目を加えると 10 以上になればよい。(1)(2) は回数が多く、直前までの和が最小値付近に限られることを使って数える。(3) は 2 回目までの和 s ごとに、3 回目に必要な目の個数を掛けて数える。「10 に達するか越える」であり、ちょうど 10 ではない点に注意する。

【解答】

(1) 10 回目に初めて終了するには、9 回目までの合計が 10 未満でなければならない。9 回の出目の合計の最小値は $1 + 1 + \cdots + 1 = 9$ である。したがって 9 回目までの合計が 10 未満であるためには、9 回すべてで 1 が出るしかない。この場合、10 回目はどの目が出てても合計が 10 以上になって終了する。よって $p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9$ である。

(2) 9 回目に終了するには、8 回目までの合計が 10 未満で、9 回目の出目を加えると 10 以上になればよい。8 回の出目の合計の最小値は 8 なので、8 回目までの合計は 8 または 9 の場合だけを考えればよい。

合計が 8 となるのは 8 回すべて 1 が出る 1 通りである。この場合、9 回目の出目は 2, 3, 4, 5, 6 の 5 通りで終了する。合計が 9 となるのは、8 回のうち 1 回だけ 2 が出て残りが 1 である場合で、8 通りである。この場合、9 回目の出目は何でもよいので 6 通りである。したがって有利な出方は $1 \cdot 5 + 8 \cdot 6 = 53$ 通りであり、全体は 6^9 通りだから $p_9 = \frac{53}{6^9}$ である。

(3) 2 回目までの合計を s 、3 回目の出目を t とする。3 回目に初めて終了するには $s < 10$, $s + t \geq 10$, $1 \leq t \leq 6$ である。2 個のさいころの和が s となる出方の数は、 $s = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ に対して 3, 4, 5, 6, 5, 4 である。 $s = 2, 3$ では 3 回目に 6 が出てても 10 に届かないので寄与しない。

また、3 回目の出目の選び方は、 $s = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ に対してそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6 通りである。よって有利な出方は $3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 99$ 通りである。全体は $6^3 = 216$ 通りだから $p_3 = \frac{99}{216} = \frac{11}{24}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

途中の合計を状態として数える。終了時刻が遅い問 1・問 2 では最小和からの超過量を数え、問 3 では 2 回目までの和ごとの出方と最後に終了させる目の個数を表にまとめる。

【解答】

(問 1)

9 回投げた時点で合計が 10 未満となるには、9 個の出目がすべて 1 でなければならない。その確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^9.$$

この状態では 10 回目の目によらず終了するので

$$p_{10} = \left(\frac{1}{6}\right)^9.$$

(問 2)

8 回目までの和を S_8 とする。終了していないためには $S_8 = 8, 9$ だけが可能である。

S_8	8 回の出方	9 回目の目	有利な列数
8	1	2, 3, 4, 5, 6	5
9	8	1, 2, 3, 4, 5, 6	48

したがって

$$p_9 = \frac{5 + 48}{6^9} = \frac{53}{6^9}.$$

(問 3)

2 回目までの和を s とする。和が s となる順序つきの出方の数と、3 回目に終了させる目の個数は次のとおりである。

s	4	5	6	7	8	9
2 回の出方	3	4	5	6	5	4
最後の目	1	2	3	4	5	6

よって有利な列数は

$$3 + 8 + 15 + 24 + 25 + 24 = 99.$$

したがって

$$p_3 = \frac{99}{6^3} = \frac{11}{24}.$$

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 20 分程度。終了時刻の条件は「直前まで 10 未満、最後に 10 以上」である。和ごとの列挙と表による再計算で

$$p_{10} = 6^{-9}, \quad p_9 = \frac{53}{6^9}, \quad p_3 = \frac{11}{24}$$

を照合した。最後の出目の選択肢を掛け忘れないことが要点である。

【第 5 問】

座標平面上の 3 点

$$A(1,0), \quad B(3,1), \quad C(2,2)$$

を頂点とする三角形の内部と境界を T とする。実数 a に対して

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 \leq a$$

を満たす点 P の全体を D とする。(問 1) D が少なくとも 1 点を含むための a の範囲を求めよ。(問 2) D が T を含むための a の範囲を求めよ。(問 3) 問 1 の条件のもとで、 D が T に含まれるための a の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

二乗和は重心 G を中心に $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3PG^2 + \text{定数}$ と書ける。これにより D は中心 G の円板になる。(1) は半径が実数になる条件、(2) は三角形全体を含むために最も遠い頂点まで届く条件、(3) は円板が三角形内に収まるために中心から各辺までの最小距離以下である条件を調べる。

【解答】

三角形 ABC の重心を G とすると $G\left(\frac{1+3+2}{3}, \frac{0+1+2}{3}\right) = (2,1)$ である。任意の点 P について、重心の性質より $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3PG^2 + AG^2 + BG^2 + CG^2$ である。実際、 $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ を用いて展開すれば交差項が消える。

ここで $AG^2 = (1-2)^2 + (0-1)^2 = 2$, $BG^2 = 1$, $CG^2 = 1$ であるから $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3PG^2 + 4$ となる。したがって D は $PG^2 \leq \frac{a-4}{3}$ で表される、中心 G の円板である。

(1) D が少なくとも 1 点を含むためには、右辺が 0 以上であればよい。よって $\frac{a-4}{3} \geq 0$ すなわち $a \geq 4$ である。

(2) D は円板で凸であり、三角形 T も 3 頂点の凸包である。したがって D が T 全体を含むためには、3 頂点 A, B, C が D に含まれれば十分かつ必要である。 G からの距離の 2 乗は $AG^2 = 2$, $BG^2 = 1$, $CG^2 = 1$ なので、必要十分条件は $\frac{a-4}{3} \geq 2$ である。よって $a \geq 10$ である。

(3) D が T に含まれるには、中心 G から三角形の各辺までの距離の最小値以下に、円板の半径を抑えればよい。各辺の方程式は $AB: x-2y-1=0$, $BC: x+y-4=0$, $CA: 2x-y-2=0$ である。点 $G(2,1)$ からこれらの直線までの距離は順に

$$\frac{|2-2-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{|2+1-4|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{|4-1-2|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。最小値は $1/\sqrt{5}$ である。

したがって $\sqrt{\frac{a-4}{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ が必要十分であり、 $\frac{a-4}{3} \leq \frac{1}{5}$ となる。(1) の条件 $a \geq 4$ と合わせて $4 \leq a \leq \frac{23}{5}$ である。

▶ 解法 2

【方針】

点 $P = (x, y)$ として距離の二乗を直接展開し、平方完成で D を円板として読む。包含の向きに応じ、問 2 では最遠頂点、問 3 では中心から最寄りの辺までの距離を調べる。

【解答】

点 $P = (x, y)$ とする。直接展開して平方完成すると

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= (x-1)^2 + y^2 + (x-3)^2 + (y-1)^2 \\ &\quad + (x-2)^2 + (y-2)^2 \\ &= 3(x-2)^2 + 3(y-1)^2 + 4. \end{aligned}$$

したがって D は中心 $G = (2, 1)$ 、半径

$$\rho = \sqrt{\frac{a-4}{3}}$$

の円板である。

(問 1)

実数の半径をもつ条件は

$$a \geq 4.$$

(問 2)

円板は凸集合なので、三角形 T を含むための必要十分条件は 3 頂点を含むことである。

$$GA^2 = 2, \quad GB^2 = GC^2 = 1.$$

よって

$$\rho^2 \geq 2$$

すなわち

$$a \geq 10.$$

(問 3)

3 辺の方程式は

$$AB : x - 2y - 1 = 0, \quad BC : x + y - 4 = 0, \quad CA : 2x - y - 2 = 0.$$

点 G からの距離は順に

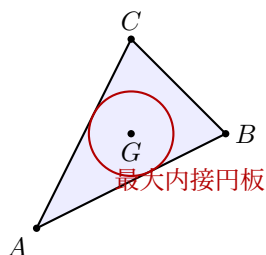
$$\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

したがって円板全体が T に含まれる条件は

$$0 \leq \rho \leq \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

よって

$$4 \leq a \leq \frac{23}{5}.$$



【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 24 分程度。重心公式と座標の平方完成の 2 通りで

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3PG^2 + 4$$

を確認した。問 2 は最遠頂点、問 3 は最寄りの辺を見る。答えは順に $a \geq 4$ 、 $a \geq 10$ 、 $4 \leq a \leq 23/5$ である。