

北海道大学 2018 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

 n を自然数とする。

(1) 次の等式を示せ。

$$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

(2) $w = \frac{10^{n(n+1)} - 2^{n+1}}{10^n - 2}$ とおく。 w は整数であることを示せ。また、 w を 10^n で割った余りは 2^n であることを示せ。

(3) 実数 x に対し、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。 $\left[\frac{10^{n(n+1)}}{10^n - 2} \right]$ を 10^n で割った余りを求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は等比数列型の恒等式であり、左辺を展開して隣合う項が打ち消し合うことを示す。(2) では $a = 10^n$ 、 $b = 2$ を (1) に代入する。得られる和の形から w が整数であることが分かり、 10^n で割った余りは最後の項 2^n だけが残る。(3) では分数を w と正の真分数の和に分け、床関数の値が w そのものになることを示す。

【解答】

(1) 左辺を展開する。

$$\begin{aligned} & (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n) \\ &= a^{n+1} + a^n b + a^{n-1}b^2 + \cdots + a^2 b^{n-1} + ab^n \\ &\quad - (a^n b + a^{n-1}b^2 + \cdots + a^2 b^{n-1} + ab^n + b^{n+1}) \end{aligned}$$

である。中間の項はすべて打ち消し合い、 $a^{n+1} - b^{n+1}$ だけが残る。よって $(a-b)(a^n + a^{n-1}b + \cdots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$ である。

(2) (1) で $a = 10^n$ 、 $b = 2$ とおくと

$$\frac{(10^n)^{n+1} - 2^{n+1}}{10^n - 2} = (10^n)^n + (10^n)^{n-1}2 + \cdots + 10^n \cdot 2^{n-1} + 2^n$$

である。左辺は w であり、右辺は整数の和である。したがって w は整数である。

さらに右辺を 10^n で割った余りを考える。最後の項 2^n 以外の項はすべて 10^n を因数にもつので、 10^n で割り切れる。また自然数 n について $0 < 2^n < 10^n$ である。したがって w を 10^n で割った余りは 2^n である。

(3)

$$\frac{10^{n(n+1)}}{10^n - 2} = \frac{10^{n(n+1)} - 2^{n+1}}{10^n - 2} + \frac{2^{n+1}}{10^n - 2} = w + \frac{2^{n+1}}{10^n - 2}$$

である。ここで n は自然数なので $0 < \frac{2^{n+1}}{10^n - 2} < 1$ が成り立つ。実際、 $n = 1$ では $4 < 8$ であり、 $n \geq 2$ では $2^{n+1} < 10^n - 2$ である。

したがって $\left[\frac{10^{n(n+1)}}{10^n - 2} \right] = w$ である。(2) より、 w を 10^n で割った余りは 2^n であったから、求める余りは 2^n である。

▶ 解法 2 (合同式で余りを直読)

【方針】

恒等式から w を有限和に直し、 10^n を法とする合同式で最後の項だけを残す。床関数については元の分数と整数 w の差が $(0, 1)$ にあることだけを確認する。

【解答】

(1) 左辺を展開すると中間項が相殺し、 $a^{n+1} - b^{n+1}$ だけが残る。

(2) (1) で $a = 10^n, b = 2$ とすれば

$$w = (10^n)^n + 2(10^n)^{n-1} + \cdots + 2^{n-1}10^n + 2^n.$$

よって w は整数であり、

$$w \equiv 2^n \pmod{10^n}.$$

しかも $0 < 2^n < 10^n$ だから余りは 2^n である。

(3)

$$\frac{10^{n(n+1)}}{10^n - 2} = w + \frac{2^{n+1}}{10^n - 2}.$$

右端の分数は 0 より大きく 1 より小さい。したがって床は w に等しく、その 10^n による余りも 2^n である。

【総評】 難度 6、目安時間 16 分。(1) の恒等式は等比数列の和だが、問題では展開による打ち消しを明示するのが自然である。(2) は $a = 10^n, b = 2$ という代入を見抜けば、整数性と余りが同時に分かる。余りの議論では、最後の項 2^n だけが 10^n の倍数でないこと、しかも $2^n < 10^n$ で本当に余りとして扱えることを書くと丁寧である。(3) は床関数のために端数が 1 未満である確認を落とさない。

【第 2 問】

虚部が正である複素数 z に対し、複素数平面上の 3 点を $O(0), P(2), Q(2z)$ とする。三角形 OPQ の外側に、各辺を一辺とする正三角形 OPR, PQS, QOT を作り、それぞれの重心を U, V, W とする。

(1) U, V, W が表す複素数を z で表せ。

(2) 三角形 UVW が正三角形であることを示せ。

(3)

$$|z - i| = \frac{1}{2}$$

を満たして z が動くとき、三角形 UVW の重心 G の軌跡を図示せよ。ただし i は虚数単位である。

▶ 解法 1

【方針】

外側に作る正三角形の第 3 頂点を、複素数の 60° 回転で表す。 OP の外側は下向きなので $R = 1 - \sqrt{3}i$ となり、他の 2 辺でも三角形 OPQ の外側になる向きを選ぶ。各重心は 3 頂点の平均として z の一次式になる。(2) は $V - U$ と $W - U$ の差を計算し、一方がもう一方を 60° 回転したものだとしす。(3) は重心 $G = (U + V + W)/3$ が $G = \frac{2}{3}(z + 1)$ であることから、与えられた円が中心と半径を変えて写る。

【解答】

(1) $\triangle OPQ$ は、 $O = 0, P = 2, Q = 2z$ であり、 z の虚部が正なので辺 OP の上側にある。したがって、辺 OP の外側に作る正三角形の第 3 頂点は $R = 1 - \sqrt{3}i$ である。よって $U = \frac{0 + 2 + R}{3} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$ である。

次に辺 PQ に外側の正三角形を作る。 P から Q へのベクトルは $2z - 2$ であり、外側になる向きに -60° 回転するので $S = 2 + (2z - 2)\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ である。したがって

$$\begin{aligned} V &= \frac{2 + 2z + S}{3} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z \end{aligned}$$

である。

最後に辺 QO に外側の正三角形を作ると、第 3 頂点は $T = 2z \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ である。よって $W = \frac{2z + 0 + T}{3} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z$ である。以上より $U = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$ $V = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z$ $W = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z$ である。

(2) (1) の式から $V - U = \frac{2\sqrt{3}}{3}i + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z$ であり、 $W - U = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z - 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ である。直接整理すると $W - U = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}(V - U)$ が成り立つ。

ここで $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ は絶対値 1、偏角 $\frac{\pi}{3}$ の複素数である。したがって、ベクトル $\overrightarrow{UW}$ はベクトル $\overrightarrow{UV}$ を長さを変えずに 60° 回転したものである。よって $UV = UW$ かつ $\angle VUW = \frac{\pi}{3}$ であるから、 $\triangle UVW$ は正三角形である。

(3) $\triangle UVW$ の重心を G とする。複素数で表すと $G = \frac{U + V + W}{3}$ である。(1) の式を加えると $U + V + W = 2 + 2z$ であるから $G = \frac{2}{3}(z + 1)$ である。

条件 $|z - i| = \frac{1}{2}$ を G の式へ移す。 $z = \frac{3}{2}G - 1$ なので $\left|\frac{3}{2}G - 1 - i\right| = \frac{1}{2}$ である。両辺に $\frac{2}{3}$ を掛けると $\left|G - \frac{2}{3}(1 + i)\right| = \frac{1}{3}$ となる。

したがって G の軌跡は、中心 $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$ 半径 $\frac{1}{3}$ の円である。与えられた z の円は全体が上半平面にあるので、軌跡もこの円周全体である。

▶ 解法 2 (ナポレオン図形のベクトル証明)

【方針】

正三角形の第 3 頂点を 60° 回転で表し、重心差だけを計算する。 $\overrightarrow{UW}$ が $\overrightarrow{UV}$ の 60° 回転であることを一つの式で示す。最後は重心の一次変換として円の中心と半径を写す。

【解答】

正三角形の外向き 60° 回転を用いて各重心を計算すると

$$U = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i,$$

$$V = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i + \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z, \quad W = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)z.$$

これらの差を取ると

$$W - U = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}(V - U).$$

係数の絶対値は 1、偏角は $\pi/3$ なので、 $WU = UV$ かつ $\angle VUW = \pi/3$ 。よって三角形 UVW は正三角形である。

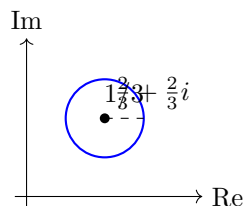
また、その重心は

$$G = \frac{U + V + W}{3} = \frac{2}{3}(z + 1).$$

したがって

$$|z - i| = \frac{1}{2} \iff \left|G - \frac{2}{3}(1 + i)\right| = \frac{1}{3}.$$

軌跡は中心 $2/3 + 2i/3$ 、半径 $1/3$ の円周全体である。



【総評】 難度 8、目安時間 26 分。外側に作る正三角形の向きが最初の難所で、ここを誤ると重心の一次式が全て変わる。複素数平面では、 60° 回転を $(1 \pm \sqrt{3}i)/2$ の掛け算で表すと計算を統一できる。(2) は 3 辺を直接比べるより、 $W - U$ が $V - U$ の 60° 回転であることを示すのが短い。(3) は重心が $G = \frac{2}{3}(z + 1)$ という一次変換なので、円の中心と半径がそのまま移る。

【第 3 問】

はじめ袋に赤玉を a 個入れる。袋から玉を 1 個取り出し、赤なら青玉を 1 個、青なら赤玉を 1 個加え、取り出した玉も戻す試行を繰り返す。 n 回目の試行後に赤玉が k 個である確率を $p_n(k)$ とし

$$M_n = \sum_{k=0}^{a+n} k p_n(k)$$

とする。ただし a, n は自然数である。

(1) $p_2(k)$ を求めよ。

(2)

$$p_{n+1}(k+1) = B p_n(k) + C p_n(k+1)$$

と表すとき、 B, C を a, k, n で表せ。

(3)

$$M_1 = a, \quad M_{n+1} = \frac{a+n-1}{a+n} M_n + 1$$

を示せ。

(4) M_n の一般項と

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n}$$

を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

試行後の赤玉数だけを状態として追う。 n 回目の試行後には袋の玉の総数が $a+n$ 個であることを常に確認する。(1) は 1 回目後の状態から 2 回目を直接数える。(2) では、 $n+1$ 回目後に赤玉が $k+1$ 個になる経路は、直前に k 個で青を引く場合と、直前に $k+1$ 個で赤を引く場合の 2 つである。(3) は次回赤玉が増える確率を条件付き期待値として足す。(4) は一次漸化式を積で展開し、係数が望遠鏡型に消えることを使って一般項を求める。

【解答】

(1) はじめ袋には赤玉が a 個だけ入っている。1 回目の試行では必ず赤玉を取り出すので、青玉が 1 個追加され、取り出した赤玉も戻される。したがって 1 回目の試行後、袋には赤玉 a 個、青玉 1 個が入っている。

2 回目の試行で赤玉を取り出す確率は $\frac{a}{a+1}$ である。この場合、青玉が 1 個追加されるので、赤玉の個数は a のままである。一方、2 回目に青玉を取り出す確率は $\frac{1}{a+1}$ であり、この場合は赤玉が 1 個追加され、赤玉の個数は $a+1$ になる。

よって $p_2(a) = \frac{a}{a+1}$, $p_2(a+1) = \frac{1}{a+1}$ であり、それ以外の k では $p_2(k) = 0$ である。

(2) n 回目の試行後には、袋の中の玉は全部で $a+n$ 個である。 $n+1$ 回目の試行後に赤玉が $k+1$ 個になるには、次の 2 通りがある。まず、 n 回目の試行後に赤玉が k 個で、次に青玉を取り出す場合である。このとき青玉の個数は $a+n-k$ 個なので、その確率は $\frac{a+n-k}{a+n}$ である。したがって $B = \frac{a+n-k}{a+n}$ である。

もう 1 つは、 n 回目の試行後に赤玉が $k+1$ 個で、次に赤玉を取り出す場合である。この場合、赤玉の個数は増えず $k+1$ 個のままである。その確率は $\frac{k+1}{a+n}$ である。したがって $C = \frac{k+1}{a+n}$ である。よって $B = \frac{a+n-k}{a+n}$, $C = \frac{k+1}{a+n}$ である。

(3) n 回目の試行後の赤玉の個数を K とする。このとき袋の総数は $a+n$ 個であり、青玉の個数は $a+n-K$ 個である。次の試行で青玉を取り出すと赤玉が 1 個増え、赤玉を取り出すと赤玉の個数は変わらない。したがって、 K が与えられたとき、次回後の赤玉数の期待値は $K + \frac{a+n-K}{a+n}$ である。

期待値を取ると

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= M_n + \frac{a+n-M_n}{a+n} \\ &= \frac{a+n-1}{a+n} M_n + 1 \end{aligned}$$

である。また (1) の前に述べた通り、1 回目の試行後の赤玉の個数は必ず a なので $M_1 = a$ である。

(4) 漸化式 $M_{n+1} = \frac{a+n-1}{a+n} M_n + 1$ を繰り返して解く。 $j = 1, 2, \dots, n-1$ で現れる係数 $\frac{a+j-1}{a+j}$ の積は望遠鏡型に消える。 $M_1 = a$ の寄与は $a \cdot \frac{a}{a+n-1} = \frac{a^2}{a+n-1}$ である。また、 r 回目から加わる定数 1 の寄与は、最後まで進む間に $\frac{a+r}{a+n-1}$ 倍される。したがって

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{a^2}{a+n-1} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{a+r}{a+n-1} \\ &= \frac{a^2 + (n-1)a + \frac{n(n-1)}{2}}{a+n-1} \\ &= a + \frac{n(n-1)}{2(a+n-1)} \end{aligned}$$

である。よって $M_n = a + \frac{n(n-1)}{2(a+n-1)}$ である。

さらに $\frac{M_n}{n} = \frac{a}{n} + \frac{n-1}{2(a+n-1)}$ だから $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \frac{1}{2}$ である。

▶ 解法 2 (期待値の増分と階差)

【方針】

赤玉数を確率変数 X_n とし、次の 1 回で増える指示変数を加える。条件付き期待値から漸化式を出した後、 $N_n = (a+n-1)M_n$ と置けば階差が単純な等差数列になる。

【解答】

(1) 1 回目後は赤 a 個、青 1 個である。したがって

$$p_2(a) = \frac{a}{a+1}, \quad p_2(a+1) = \frac{1}{a+1}$$

で、他は 0 である。

(2) 直前に赤玉が k 個で青を引く経路と、直前に $k+1$ 個で赤を引く経路を分けると

$$B = \frac{a+n-k}{a+n}, \quad C = \frac{k+1}{a+n}.$$

(3) n 回目後の赤玉数を X_n とする。次に赤玉が 1 個増える条件付き確率は

$$\frac{a+n-X_n}{a+n}.$$

よって

$$M_{n+1} = M_n + E \left[\frac{a+n-X_n}{a+n} \right] = \frac{a+n-1}{a+n} M_n + 1.$$

また $M_1 = a$ である。

(4) $N_n = (a+n-1)M_n$ と置く。漸化式の両辺に $a+n$ を掛けると

$$N_{n+1} - N_n = a+n, \quad N_1 = a^2.$$

したがって

$$N_n = a^2 + \sum_{j=1}^{n-1} (a+j) = a(a+n-1) + \frac{n(n-1)}{2}.$$

ゆえに

$$M_n = a + \frac{n(n-1)}{2(a+n-1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

【総評】 難度 7、目安時間 24 分。添字の管理が最も重要な確率漸化式の問題である。 n 回目の試行後の総数が $a+n$ 個であることを固定してから、赤玉数 k の状態遷移を考えると混乱しにくい。(3) は分布全体を直接動かすより、赤玉が次に 1 個増える確率を条件付き期待値で足すのが簡潔である。(4) の一般項は、係数積が $(a+r)/(a+n-1)$ に縮むことを明示すると、単なる代入確認より説得力が出る。

【第 4 問】

$$f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

とし、曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $s > 1$ とし、 $0 \leq x \leq \log s$ における C の長さを $L(s)$ とする。

(1) $L(s)$ を s で表せ。

(2) $x = \log s$ に対応する C 上の点を P 、そこでの接線を l とする。 $Q(v, w)$ は l 上にあり、 $v < \log s$ 、 $PQ = L(s)$ を満たす。 v, w を s で表せ。

(3) $s > 1$ が動くとき、点

$$R(-v + \log s, w)$$

の軌跡を図示せよ。

▶ 解法 1

【方針】

$f(x)$ は双曲線関数型だが、必要なのは $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ と $1 + f'(x)^2 = f(x)^2$ という恒等的な整理である。(1) は曲線長の公式からすぐに積分できる。(2) では点 P の座標、接線の傾き、接線方向の単位ベクトルを求め、距離 $L(s)$ だけ左向きに進むことで Q を出す。(3) は $R = (-v + \log s, w)$ の座標が $((s^2 - 1)/(s^2 + 1), 2s/(s^2 + 1))$ となるので、単位円の第 1 象限の開いた円弧であることを示す。

【解答】

(1) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ より $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ である。したがって

$$\begin{aligned} 1 + \{f'(x)\}^2 &= 1 + \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 \end{aligned}$$

である。 $f(x) > 0$ なので $\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$ である。

よって曲線の長さは

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^{\log s} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^{\log s} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \right]_0^{\log s} \\ &= \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

である。

(2) 点 P の座標は $P(\log s, \frac{1}{2}(s + \frac{1}{s}))$ である。また、接線 l の傾きは $f'(\log s) = \frac{1}{2}(s - \frac{1}{s}) = L(s)$ である。これを $m = \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right) = \frac{s^2 - 1}{2s}$ とおく。

接線方向のベクトルは $(1, m)$ であり、その長さは

$$\sqrt{1 + m^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{s^2 - 1}{2s} \right)^2} = \frac{s^2 + 1}{2s}$$

である。 Q は $v < \log s$ を満たすので、 P から左向きに接線上を距離 $L(s) = m$ だけ進む。したがって、 x 座標の減少量は

$$\frac{m}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} \text{ であり、} y \text{ 座標の減少量は } \frac{m^2}{\sqrt{1 + m^2}} = \frac{(s^2 - 1)^2}{2s(s^2 + 1)} \text{ である。}$$

よって $v = \log s - \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$ である。また

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(s + \frac{1}{s} \right) - \frac{(s^2 - 1)^2}{2s(s^2 + 1)} \\ &= \frac{s^2 + 1}{2s} - \frac{(s^2 - 1)^2}{2s(s^2 + 1)} \\ &= \frac{2s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

である。

(3) (2) より $R = (-v + \log s, w) = \left(\frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}, \frac{2s}{s^2 + 1} \right)$ である。 $R = (X, Y)$ とおくと $X = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}$, $Y = \frac{2s}{s^2 + 1}$ である。したがって $X^2 + Y^2 = \frac{(s^2 - 1)^2 + 4s^2}{(s^2 + 1)^2} = 1$ である。

また $s > 1$ なので $0 < X < 1$, $0 < Y < 1$ である。逆に、単位円の第 1 象限部分で $0 < X < 1$, $0 < Y < 1$ を満たす点は、 X が 0 から 1 まで動くのに対応して一意に $s > 1$ で表される。

したがって軌跡は、単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の第 1 象限の円弧のうち、端点 $(0, 1)$, $(1, 0)$ を除いた部分である。

▶ 解法 2 (双曲線関数と半角表示)

【方針】

$f = \cosh x$, $f' = \sinh x$ と見て曲線長を処理する。接線上の移動は単位方向ベクトルで求め、最後の有理式を三角関数の半角公式に対応させて軌跡を直読する。

【解答】

(1) $f'(x) = (e^x - e^{-x})/2$ であり

$$1 + f'(x)^2 = f(x)^2.$$

したがって

$$L(s) = \int_0^{\log s} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(s - \frac{1}{s} \right).$$

(2) 接線の傾きも $L(s)$ である。接線の左向き単位ベクトルに距離 $L(s)$ を掛けて P から引くと

$$v = \log s - \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}, \quad w = \frac{2s}{s^2 + 1}.$$

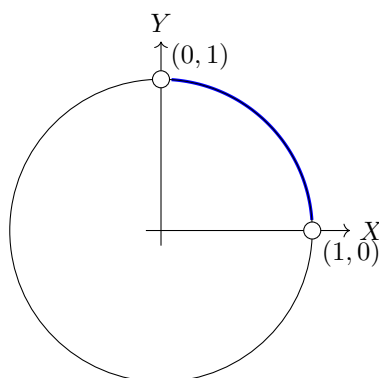
(3) $R = (X, Y)$ とすれば

$$X = \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1}, \quad Y = \frac{2s}{s^2 + 1}.$$

$\tan(\theta/2) = 1/s$ と置くと $s > 1$ より $0 < \theta < \pi/2$ であり、半角公式から

$$X = \cos \theta, \quad Y = \sin \theta.$$

ゆえに軌跡は単位円の第 1 象限の円弧から端点 $(0, 1)$, $(1, 0)$ を除いた部分である。



【総評】 難度 7、目安時間 22 分。曲線長の積分で $\sqrt{1+f'^2} = f$ になる美しい構造を見落とさないことが出発点である。(2) では接線の傾きが $L(s)$ と一致するため、距離 $L(s)$ だけ左へ進む計算がきれいに整理される。単位方向ベクトルを使うと、 v, w の式を符号まで安定して求められる。(3) は有理式の形から単位円を確認し、 $s > 1$ によって端点を含まない第 1 象限の円弧になることを明記する必要がある。