

入 学 試 験 問 題

数 学



北 海 道 大 学 2018 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

座標空間の 4 点

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad B(0, 0, 1), \quad C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right), \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$$

に対し

$$\vec{p} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad \vec{q} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD}$$

とおく。ただし O は原点、 s, t は実数とする。

- (1) $|\vec{p}|$ 、 $|\vec{q}|$ 、 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を s, t で表せ。
- (2) $t = 1/2$ のとき、 $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $3\pi/4$ となる s を求めよ。
- (3) s, t が実数全体を動くとき、 $|\vec{p} - \vec{q}|$ の最小値を求めよ。

第 2 問

$$z + \frac{4}{z}$$

が実数となる、0 でない複素数 z の全体を D とする。

(1) D を複素平面上に図示せよ。

(2) k を実数とする。 D に属する z で

$$k \left(z + \frac{4}{z} + 8 \right) = i \left(z - \frac{4}{z} \right)$$

を満たすものが存在するような k の範囲を求めよ。ただし i は虚数単位である。

第 3 問

数字 $0, 1, 2, 8$ が書かれたカードがそれぞれ 2 枚、計 8 枚ある。ここから 4 枚を取り出して横一列に並べ、できる自然数を n とする。先頭の 0 は桁数に数えない。例えば $0, 0, 1, 1$ の順なら $n = 11$ である。

- (1) 整数 a, b, c, d に対し、 $1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数であることと、 $a + b + c + d$ が 9 の倍数であることが同値であると示せ。
- (2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。
- (3) n が偶数であったとき、 n が 9 の倍数である条件付き確率を求めよ。

第 4 問

座標平面上に

$$O(0, 0), \quad A\left(\frac{15}{2}, 0\right), \quad B(11, 11)$$

がある。条件

$$BQ \geq OQ \geq 2AQ$$

を満たす点 $Q(x, y)$ の全体を D とする。

(1) D を図示し、 $BQ = OQ = 2AQ$ となるすべての Q を求めよ。

(2) $0 < p \leq 11$ 、 $P = (p, 11)$ とする。 $OQ \geq PQ$ を満たす $Q \in D$ が存在するような p の範囲を求めよ。

第 5 問

2つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

を考える。

(1) $0 \leq x \leq \pi/2$ のとき

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$$

を示せ。

(2) $0 \leq x \leq \pi/2$ のとき $g(x) \leq f(x)$ を示せ。

(3) $0 \leq x \leq \pi/2$ において、2 曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ と y 軸が囲む面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)