

北海道大学 2018 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

座標空間の 4 点

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \quad B(0, 0, 1), \quad C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right), \quad D\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$$

に対し

$$\vec{p} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad \vec{q} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD}$$

とおく。ただし O は原点、 s, t は実数とする。(1) $|\vec{p}|$ 、 $|\vec{q}|$ 、 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ を s, t で表せ。(2) $t = 1/2$ のとき、 $\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角が $3\pi/4$ となる s を求めよ。(3) s, t が実数全体を動くとき、 $|\vec{p} - \vec{q}|$ の最小値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$\vec{p}$ は線分 AB を、 $\vec{q}$ は線分 CD を実数パラメータで表したベクトルである。まず座標を明示してから長さや内積を計算する。 xy 成分では、 A の向きと CD の方向が直交しているため内積が大きく簡単になる。(2) は $t = 1/2$ を代入し、なす角の余弦が $-\sqrt{2}/2$ である条件から $|\vec{q}| = 1$ を得る。(3) は $|\vec{p} - \vec{q}|^2$ を平方完成して、実数 s, t 全体での最小値を求める。

【解答】

(1) まず $\vec{p}$ を座標で表す。

$$\vec{p} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t), \frac{1}{2}(1-t), t\right)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= \frac{3}{4}(1-t)^2 + \frac{1}{4}(1-t)^2 + t^2 \\ &= (1-t)^2 + t^2 \\ &= 2t^2 - 2t + 1 \end{aligned}$$

であり、 $|\vec{p}| = \sqrt{2t^2 - 2t + 1}$ である。

次に

$$\vec{q} = (1-s)\vec{OC} + s\vec{OD} = \left(s - \frac{1}{2}, \sqrt{3}\left(s - \frac{1}{2}\right), -1\right)$$

である。よって

$$\begin{aligned} |\vec{q}|^2 &= \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= 4\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= 4s^2 - 4s + 2 \end{aligned}$$

であるから $|\vec{q}| = \sqrt{2(2s^2 - 2s + 1)}$ である。

また内積は

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{q} &= (1-t)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \cdot \left(s - \frac{1}{2}, \sqrt{3}\left(s - \frac{1}{2}\right), -1\right) \\ &\quad + t(0, 0, 1) \cdot \left(s - \frac{1}{2}, \sqrt{3}\left(s - \frac{1}{2}\right), -1\right) \end{aligned}$$

である。第 1 項の xy 成分の内積は

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(s - \frac{1}{2}\right) = 0$$

なので $\vec{p} \cdot \vec{q} = -t$ である。

(2) $t = \frac{1}{2}$ のとき、(1) より $|\vec{p}|^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$ であり、 $\vec{p} \cdot \vec{q} = -\frac{1}{2}$ である。なす角が $\frac{3\pi}{4}$ である条件は

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| |\vec{q}|} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

である。これに代入すると $\frac{-1/2}{(1/\sqrt{2})|\vec{q}|} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ であり、 $|\vec{q}| = 1$ を得る。よって $4s^2 - 4s + 2 = 1$ すなわち $(2s - 1)^2 = 0$ である。したがって $s = \frac{1}{2}$ である。

(3) (1) の結果を使うと

$$\begin{aligned} |\vec{p} - \vec{q}|^2 &= |\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} \\ &= (2t^2 - 2t + 1) + (4s^2 - 4s + 2) + 2t \\ &= 4s^2 - 4s + 2t^2 + 3 \\ &= 4\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + 2t^2 + 2 \end{aligned}$$

である。 s, t は実数全体を動くので、右辺の最小値は $s = \frac{1}{2}$, $t = 0$ のときの 2 である。したがって求める長さの最小値は $\sqrt{2}$ である。

▶ 解法 2 (2 直線間の距離)

【方針】

設問 (3) では $\vec{p}$ と $\vec{q}$ の終点が、それぞれ直線 AB 、 CD 上を動くとする。2 直線の方法ベクトルの外積を法線として用いれば、平方完成とは別に最短距離を一度に求められる。

【解答】

(1) 座標表示から直接計算すると

$$|\vec{p}|^2 = 2t^2 - 2t + 1, \quad |\vec{q}|^2 = 4s^2 - 4s + 2,$$

また A の xy 成分と CD の方向が直交するため

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = -t$$

である。

(2) $t = 1/2$ のとき、 $|\vec{p}| = 1/\sqrt{2}$ 、 $\vec{p} \cdot \vec{q} = -1/2$ である。余弦の式から $|\vec{q}| = 1$ となり、

$$4s^2 - 4s + 2 = 1$$

より $s = 1/2$ を得る。

(3) $\vec{p}$ の終点は直線 AB 、 $\vec{q}$ の終点は直線 CD を動く。方向ベクトルを

$$\mathbf{u} = B - A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right), \quad \mathbf{v} = D - C = (1, \sqrt{3}, 0)$$

とすると

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (-\sqrt{3}, 1, 2), \quad |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 2\sqrt{2}.$$

したがって 2 直線間の距離は

$$\frac{|(C - A) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

実際、 $t = 0, s = 1/2$ でこの距離を達成するので、求める最小値は $\sqrt{2}$ である。

【総評】 難度 6、目安時間 16 分。座標が三角関数の値を含むため複雑に見えるが、実際には内積の消える構造があり、整理すればかなり単純になる。(1) で $\vec{p}$ 、 $\vec{q}$ の座標を先に明示することが大切である。(2) は角度条件から $|\vec{q}| = 1$ に落ちる。(3) は距離そのものではなく距離の 2 乗を平方完成し、 s, t が実数全体を動くことを使って最小値を確定する。

【第 2 問】

$$z + \frac{4}{z}$$

が実数となる、0 でない複素数 z の全体を D とする。

- (1) D を複素平面上に図示せよ。
 (2) k を実数とする。 D に属する z で

$$k \left(z + \frac{4}{z} + 8 \right) = i \left(z - \frac{4}{z} \right)$$

を満たすものが存在するような k の範囲を求めよ。ただし i は虚数単位である。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $z = x + yi$ において、 $z + 4/z$ の虚部が 0 になる条件を求める。すると $y = 0$ または $x^2 + y^2 = 4$ となり、 D は実軸と半径 2 の円の和集合である。(2) では、実軸上の点は別に確認し、円 $|z| = 2$ 上では $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ と置く。方程式から $k = -\sin \theta / (\cos \theta + 2)$ が出るので、 $u = \cos \theta$ として k^2 の最大値を調べる。

【解答】

(1) $z = x + yi$ とおく。ただし $(x, y) \neq (0, 0)$ である。このとき $\frac{4}{z} = \frac{4(x - yi)}{x^2 + y^2}$ だから、 $z + \frac{4}{z} = x + yi + \frac{4x}{x^2 + y^2} - \frac{4yi}{x^2 + y^2}$ である。虚部は $y \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right)$ である。したがって $z + 4/z$ が実数である条件は $y \left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2} \right) = 0$ である。よって $y = 0$ または $x^2 + y^2 = 4$ である。

したがって D は、原点を除いた実軸と、原点中心・半径 2 の円周の和集合である。円周上には $z = 0$ は含まれないので、そのまま含めてよい。

(2) まず z が実軸上にある場合を考える。このとき $z + 4/z$ と $z - 4/z$ はどちらも実数である。方程式 $k \left(z + \frac{4}{z} + 8 \right) = i \left(z - \frac{4}{z} \right)$ の左辺は実数、右辺は純虚数なので、両辺が等しいためには両辺が 0 でなければならない。したがって $z - \frac{4}{z} = 0$ より $z = \pm 2$ である。このとき左辺が 0 になるためには $k = 0$ が必要であり、 $k = 0$ は後で得る範囲に含まれる。

次に円 $|z| = 2$ 上の点を考える。 $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと $\frac{4}{z} = 2(\cos \theta - i \sin \theta)$ である。したがって $z + \frac{4}{z} = 4 \cos \theta$, $z - \frac{4}{z} = 4i \sin \theta$ である。方程式は $k(4 \cos \theta + 8) = -4 \sin \theta$ となる。 $\cos \theta + 2 > 0$ であるから $k = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta + 2}$ である。 $u = \cos \theta$ とおくと、 $-1 \leq u \leq 1$ であり、 $k^2 = \frac{1 - u^2}{(u + 2)^2}$ である。これを $\phi(u) = \frac{1 - u^2}{(u + 2)^2}$ とおく。分子を整理して微分すると $\phi'(u) = \frac{-2(u + 2)(2u + 1)}{(u + 2)^4}$ である。 $-1 \leq u \leq 1$ では $u + 2 > 0$ なので、最大は $u = -\frac{1}{2}$ で起こる。このとき

$$\phi \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{1 - \frac{1}{4}}{\left(\frac{3}{2} \right)^2} = \frac{1}{3}$$

である。 $\sin \theta$ の符号を変えれば k の符号も変わるので、 k は正負対称にすべての値をとる。よって求める範囲は $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

▶ 解法 2 (直線と円の交点条件)

【方針】

円周 $|z| = 2$ 上では $4/z = \bar{z}$ となる。 $z = x + yi$ と置けば方程式は直線 $y = -k(x + 4)$ になり、原点からこの直線までの距離が円の半径 2 以下という条件だけで k の範囲が決まる。

【解答】

(1) $z = x + yi$ とおくと

$$\operatorname{Im}\left(z + \frac{4}{z}\right) = y\left(1 - \frac{4}{x^2 + y^2}\right).$$

したがって

$$D = \{y = 0, z \neq 0\} \cup \{x^2 + y^2 = 4\}.$$

(2) 実軸上では両辺の実部・虚部を比較して $k = 0, z = \pm 2$ だけが候補となり、これは後の範囲に含まれる。円周上では $4/z = \bar{z}$ だから

$$z + \frac{4}{z} = 2x, \quad z - \frac{4}{z} = 2yi.$$

よって与式は

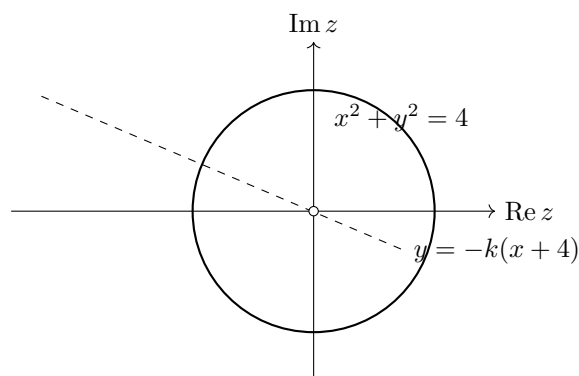
$$k(2x + 8) = -2y, \quad y = -k(x + 4)$$

となる。この直線と円 $x^2 + y^2 = 4$ が交わるための必要十分条件は、原点から直線 $kx + y + 4k = 0$ までの距離が 2 以下であること、すなわち

$$\frac{4|k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 2.$$

これを平方して整理すると $3k^2 \leq 1$ 。したがって

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$



【総評】 難度 7、目安時間 20 分。 D が実軸と円周の和集合になる点が第一の山である。条件式を処理するとき、実軸上の点では左辺が実数、右辺が純虚数になるため、例外として $z = \pm 2, k = 0$ を確認する必要がある。円周上では三角関数表示によって k が一変数関数になる。最大値は k ではなく k^2 を調べると、符号をまとめて扱える。

【第 3 問】

数字 0, 1, 2, 8 が書かれたカードがそれぞれ 2 枚、計 8 枚ある。ここから 4 枚を取り出して横一列に並べ、できる自然数を n とする。先頭の 0 は桁数に数えない。例えば 0, 0, 1, 1 の順なら $n = 11$ である。

(1) 整数 a, b, c, d に対し、 $1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数であることと、 $a + b + c + d$ が 9 の倍数であることが同値であると示せ。

(2) n が 9 の倍数である確率を求めよ。

(3) n が偶数であったとき、 n が 9 の倍数である条件付き確率を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は合同式 $10 \equiv 1 \pmod{9}$ から、各桁の重みがすべて 1 と同じになることを示す。(2)(3) では同じ数字のカードが 2 枚ずつあるので、カードを物理的に区別して数える方針で統一する。9 の倍数条件は 4 枚の数字の和が 9 または 18 になることに対応し、可能な数字の組を列挙する。(3) は条件付き確率なので、一の位が偶数である並べ方を分母にし、(2) で列挙した各組のうち一の位が偶数になるものを数え直す。

【解答】

(1) $10 \equiv 1 \pmod{9}$ であるから $100 \equiv 1$, $1000 \equiv 1 \pmod{9}$ である。したがって $1000a + 100b + 10c + d \equiv a + b + c + d \pmod{9}$ である。よって $1000a + 100b + 10c + d$ が 9 の倍数であることと、 $a + b + c + d$ が 9 の倍数であることは同値である。

(2) 8 枚のカードを物理的に区別して考える。4 枚を取り出して横一列に並べる方法は $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ 通りである。

(1) より、 n が 9 の倍数であるかどうかは、並んだ 4 枚の数字の和で判定できる。4 枚の数字の和は最大でも $8 + 8 + 2 + 2 = 20$ なので、9 の倍数になるには和が 9 または 18 であればよい。各数字は 2 枚までしか使えないから、該当する数字の組は 0, 0, 1, 8 または 0, 2, 8, 8 または 1, 1, 8, 8 である。

それぞれの並べ方を、カードを区別して数える。0, 0, 1, 8 では、1 のカードの選び方が 2 通り、8 のカードの選び方が 2 通り、並べ方が $4!$ 通りなので $2 \cdot 2 \cdot 4! = 96$ 通りである。0, 2, 8, 8 も同様に、0 の選び方 2 通り、2 の選び方 2 通り、並べ方 $4!$ 通りで 96 通りである。1, 1, 8, 8 はカードの選び方が決まっており、並べ方が $4! = 24$ 通りである。

したがって、9 の倍数となる並べ方は $96 + 96 + 24 = 216$ 通りである。求める確率は $\frac{216}{1680} = \frac{9}{70}$ である。

(3) n が偶数であることは、一の位のカードが 0, 2, 8 のいずれかであることと同値である。一の位に置ける偶数カードは 6 枚あり、残り 3 つの位置には残ったカードから順に選べばよい。したがって偶数となる並べ方は $6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1260$ 通りである。

次に、(2) で数えた 9 の倍数の並べ方のうち偶数であるものを数える。0, 0, 1, 8 の場合、一の位が 0 または 8 ならよい。一の位が 0 の並べ方は $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3! = 48$ 通り、一の位が 8 の並べ方は $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$ 通りで、合計 72 通りである。0, 2, 8, 8 の場合は 4 枚すべてが偶数なので、(2) で数えた 96 通りすべてが偶数である。1, 1, 8, 8 の場合は、一の位が 8 でなければならない。8 のカードを一の位に置く選び方が 2 通りあり、残り 3 枚の並べ方が $3!$ 通りなので $2 \cdot 3! = 12$ 通りである。

よって、偶数かつ 9 の倍数である並べ方は $72 + 96 + 12 = 180$ 通りである。したがって条件付き確率は $\frac{180}{1260} = \frac{1}{7}$ である。

▶ 解法 2 (数字の多重集合ごとの表)

【方針】

4 枚の物理カードを区別した $8P4$ 通りを分母にする。9 の倍数となる数字の多重集合を先に列挙し、各集合について全配列数と偶数配列数を同じ表で数えることで、設問 (2)(3) を一度に処理する。

【解答】

(1) $10 \equiv 1 \pmod{9}$ だから

$$1000a + 100b + 10c + d \equiv a + b + c + d \pmod{9}.$$

よって同値である。

(2)(3) 物理カードを区別すると全配列は $8P4 = 1680$ 通りである。桁和は最大 20 なので、9 の倍数となる多重集合は

$$\{0, 0, 1, 8\}, \quad \{0, 2, 8, 8\}, \quad \{1, 1, 8, 8\}$$

だけである。各場合を数えると

数字の組	0018	0288	1188	合計
全配列数	96	96	24	216
偶数配列数	72	96	12	180

となる。したがって

$$P(9 \text{ の倍数}) = \frac{216}{1680} = \frac{9}{70}.$$

一方、一の位が偶数の物理カードは 6 枚なので、偶数となる配列は

$$6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1260$$

通りである。ゆえに

$$P(9 \text{ の倍数} \mid n \text{ は偶数}) = \frac{180}{1260} = \frac{1}{7}.$$

表の 0018 の 72 通りは、末尾 0 の 48 通りと末尾 8 の 24 通りの和である。

【総評】 難度 7、目安時間 20 分。9 の倍数判定そのものは標準的だが、同じ数字のカードが 2 枚ずつあるため、数字列で数えるか物理カードで数えるかを途中で混ぜないことが重要である。この解答では全事象を物理カードの順列 $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ として固定している。(3) では分母を「偶数となる全並べ方」に変える必要がある。9 の倍数になる 3 種類の数字組について、一の位が偶数になる数を個別に数え直すのが安全である。

【第 4 問】

座標平面上に

$$O(0, 0), \quad A\left(\frac{15}{2}, 0\right), \quad B(11, 11)$$

がある。条件

$$BQ \geq OQ \geq 2AQ$$

を満たす点 $Q(x, y)$ の全体を D とする。

(1) D を図示し、 $BQ = OQ = 2AQ$ となるすべての Q を求めよ。

(2) $0 < p \leq 11$ 、 $P = (p, 11)$ とする。 $OQ \geq PQ$ を満たす $Q \in D$ が存在するような p の範囲を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

距離不等式を 2 乗して整理し、 D を半平面 $x + y \leq 11$ と円 $(x - 10)^2 + y^2 \leq 25$ の共通部分として表す。等号点は直線と円の交点として求める。(2) の追加条件 $OQ \geq PQ$ も 2 乗すると線形不等式 $2px + 22y \geq p^2 + 121$ になる。したがって、 D 上で一次式 $2px + 22y$ の最大値を調べればよい。 $0 < p \leq 11$ では最大は境界直線上の点 $(7, 4)$ で起こるので、そこを代入して p の範囲を出す。

【解答】

(1) まず $BQ \geq OQ$ を整理する。両辺は距離で非負なので、2 乗してよい。 $(x-11)^2 + (y-11)^2 \geq x^2 + y^2$ である。展開すると $-22x - 22y + 242 \geq 0$ すなわち $x + y \leq 11$ である。

次に $OQ \geq 2AQ$ を整理する。同様に 2 乗して $x^2 + y^2 \geq 4 \left\{ \left(x - \frac{15}{2} \right)^2 + y^2 \right\}$ である。展開して整理すると $3x^2 - 60x + 3y^2 + 225 \leq 0$ であり、3 で割って平方完成すると $(x-10)^2 + y^2 \leq 25$ となる。

したがって D は、円 $(x-10)^2 + y^2 \leq 25$ の内部および周上で、さらに半平面 $x + y \leq 11$ に含まれる部分である。

次に $BQ = OQ = 2AQ$ となる点を求める。これは 2 つの境界 $x + y = 11$, $(x-10)^2 + y^2 = 25$ の交点である。 $y = 11 - x$ を円の方程式に代入すると $(x-10)^2 + (11-x)^2 = 25$ である。整理して $x^2 - 21x + 98 = 0$ となり、 $(x-14)(x-7) = 0$ である。よって交点は $(14, -3)$, $(7, 4)$ である。

(2) 点 P は $(p, 11)$ である。条件 $OQ \geq PQ$ を 2 乗して整理すると $x^2 + y^2 \geq (x-p)^2 + (y-11)^2$ である。展開して $2px + 22y \geq p^2 + 121$ を得る。

したがって、 D 上で一次式 $F(x, y) = 2px + 22y$ がどこまで大きくなるかを調べればよい。 D は円板を直線 $x + y = 11$ の下側で切った領域である。まず円板全体で F を最大にする点を考えると、中心 $(10, 0)$ から方向 $(2p, 22)$ へ半径 5 だけ進んだ点である。その点の $x + y$ は $10 + \frac{5(p+11)}{\sqrt{p^2+121}}$ であり、 $0 < p \leq 11$ ではこれは 11 より大きい。したがって円板全体での最大点は $x + y > 11$ 側にあり、 D には含まれない。よって D での最大は切り口である線分 $x + y = 11$ 上で起こる。

この線分上では $y = 11 - x$ なので $F(x, 11 - x) = 2px + 22(11 - x) = 242 - 2(11 - p)x$ である。 $0 < p < 11$ ではこれは x が小さいほど大きい。線分の端点は (1) より $(7, 4)$ と $(14, -3)$ であるから、最大は $(7, 4)$ で起こる。 $p = 11$ のときはこの線分上で一定であり、やはり $(7, 4)$ を見れば十分である。

したがって、条件を満たす点 Q が存在するための必要十分条件は $F(7, 4) \geq p^2 + 121$ である。すなわち $14p + 88 \geq p^2 + 121$ である。整理すると $p^2 - 14p + 33 \leq 0$ であり、 $(p-3)(p-11) \leq 0$ となる。もともと $0 < p \leq 11$ なので、求める範囲は $3 \leq p \leq 11$ である。

▶ 解法 2 (領域の支持直線)

【方針】

3 つの距離条件を半平面と円板に変換する。設問 (2) の存在条件は、一次式 $px + 11y$ の等高線を領域 D に当て、最大値が条件値に届くかという支持直線の問題として捉える。

【解答】

(1) 距離を二乗して整理すると

$$BQ \geq OQ \iff x + y \leq 11,$$

$$OQ \geq 2AQ \iff (x-10)^2 + y^2 \leq 25.$$

したがって D はこの半平面と円板の共通部分である。両境界の交点は

$$x + y = 11, \quad (x-10)^2 + y^2 = 25$$

を解いて $(7, 4)$, $(14, -3)$ となる。

(2) $OQ \geq PQ$ は

$$px + 11y \geq \frac{p^2 + 121}{2}$$

と同値である。よって D 上で $px + 11y$ の最大値を求めればよい。 $0 < p < 11$ のとき等高線の傾きは $-p/11$ で、領域を上方から支える点は円弧と直線境界の接点 $(7, 4)$ である。 $p = 11$ では線分 $x + y = 11$ 上で一定なので、同じ点を用いてよい。

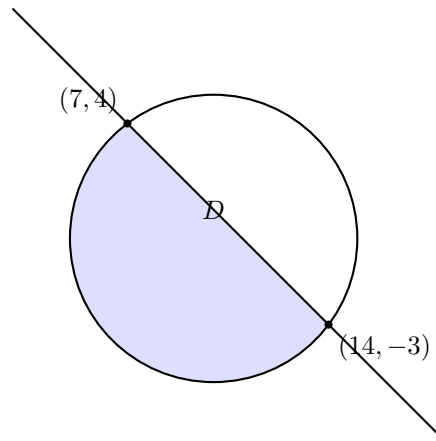
したがって存在条件は

$$7p + 44 \geq \frac{p^2 + 121}{2}.$$

すなわち

$$(p-3)(p-11) \leq 0.$$

もとの範囲と合わせて $3 \leq p \leq 11$ である。



【総評】 難度 8、目安時間 24 分。距離条件を 2 乗して、円と半平面の共通部分に直すところまでは標準的である。(2) はさらに距離条件が一次不等式になるため、領域 D 上の一次式の最大化問題になる。最大点が円弧ではなく、切り口の線分上の端点 $(7, 4)$ で起こる理由を説明するのが答案上の核心である。 $(14, -3)$ も等号点だが、 $0 < p \leq 11$ では目的関数の最大にはならない点に注意したい。

【第 5 問】

2 つの関数

$$f(x) = \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} - \frac{\pi}{2}$$

を考える。

(1) $0 \leq x \leq \pi/2$ のとき

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$$

を示せ。

(2) $0 \leq x \leq \pi/2$ のとき $g(x) \leq f(x)$ を示せ。

(3) $0 \leq x \leq \pi/2$ において、2 曲線 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ と y 軸が囲む面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $h(x) = \sin x - 2x/\pi$ とおき、端点と導関数の符号変化から示すと、グラフの弦に頼らずに説明できる。(2) は $H(x) = f(x) - g(x)$ とおき、 $H'(x) = -\sin x + x/\sqrt{\pi^2/2 - x^2}$ を評価する。(1) の下限評価と、平方根部分が $\pi/2$ 以上であることを合わせると $H'(x) \leq 0$ となるので、 $H(\pi/2) = 0$ から $H(x) \geq 0$ を得る。(3) は $f - g$ を積分し、平方根の積分は半径 $\pi/\sqrt{2}$ の円の扇形と三角形の面積で求める。

【解答】

(1) $h(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$ とおく。すると $h(0) = 0$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ である。また $h'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$ である。 $\cos x$ は $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で単調に減少するので、 $h'(x)$ は一度だけ正から負へ変わる。したがって $h(x)$ は、はじめ増加し、その後減少する。両端で 0 なので、区間全体で $h(x) \geq 0$ である。よって $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$ が成り立つ。

(2) $H(x) = f(x) - g(x) = \cos x - \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} + \frac{\pi}{2}$ とおく。示すべきことは $H(x) \geq 0$ である。

微分すると $H'(x) = -\sin x + \frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}}$ である。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ では、(1) より $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$ である。また

$$\frac{\pi^2}{2} - x^2 \geq \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

なので $\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} \geq \frac{\pi}{2}$ である。したがって $\frac{x}{\sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}} \leq \frac{2x}{\pi}$ であり、 $H'(x) \leq -\frac{2x}{\pi} + \frac{2x}{\pi} = 0$ となる。よって $H(x)$ はこの区間で減少する。

さらに

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4}} + \frac{\pi}{2} = 0$$

である。 H は減少するので、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ では $H(x) \geq H\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ である。したがって $g(x) \leq f(x)$ が成り立つ。

(3) (2) より、求める面積は

$$\int_0^{\pi/2} \{f(x) - g(x)\} dx$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \{f(x) - g(x)\} dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\cos x - \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} + \frac{\pi}{2} \right) dx \\ &= 1 + \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} dx \end{aligned}$$

である。

ここで $y = \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2}$ は、原点中心・半径 $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ の円の上半分である。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に対応する中心角は $\arcsin \frac{\pi/2}{\pi/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ である。したがってこの積分は、中心角 $\frac{\pi}{4}$ の扇形の面積と、直角三角形の面積の和で

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8}$$

である。

よって求める面積は

$$1 + \frac{\pi^2}{4} - \left(\frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8} \right) = 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16}$$

である。

▶ 解法 2 (凹性と三角置換)

【方針】

設問 (1) は $\sin x$ の凹性から弦の上にあることを用いる。設問 (2) は導関数比較へつなぎ、設問 (3) の円弧部分は $x = (\pi/\sqrt{2}) \sin \theta$ と置いて積分を直接評価する。

【解答】

(1) $0 \leq x \leq \pi/2$ では $(\sin x)'' = -\sin x \leq 0$ だから $\sin x$ は上に凸である。したがってグラフは端点 $(0, 0)$ 、 $(\pi/2, 1)$ を結ぶ弦の上にあり、

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

となる。

(2) $H = f - g$ とおくと

$$H'(x) = -\sin x + \frac{x}{\sqrt{\pi^2/2 - x^2}}.$$

この区間では

$$\sin x \geq \frac{2x}{\pi}, \quad \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} \geq \frac{\pi}{2}$$

なので $H'(x) \leq 0$ 。しかも $H(\pi/2) = 0$ だから $H(x) \geq 0$ 、すなわち $g(x) \leq f(x)$ である。

(3) 求める面積を S とすると

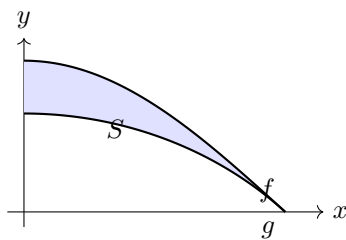
$$S = 1 + \frac{\pi^2}{4} - \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} dx.$$

ここで $x = (\pi/\sqrt{2}) \sin \theta$ と置けば、積分区間は $0 \leq \theta \leq \pi/4$ となり

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\frac{\pi^2}{2} - x^2} dx &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\pi^3}{16} + \frac{\pi^2}{8}. \end{aligned}$$

したがって

$$S = 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^3}{16}.$$



【総評】 難度 7、目安時間 22 分。(1) の不等式は (2) の導関数評価に使うため、単なる前座ではない。 $H = f - g$ を減少関数として示し、右端で 0 になることから $H \geq 0$ と結論する流れを明確にしたい。(3) では平方根の積分を公式だけで済ませず、半径 $\pi/\sqrt{2}$ 、中心角 $\pi/4$ の円弧下の面積として分解すると、計算の根拠が読みやすい。符号は $f - g$ を積分する形で最後まで保つとミスが少ない。