

北海道大学 2019 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり、3 点 O , A , B が定める平面を α とする。また、点 P から平面 α に垂線を下ろし、 α との交点を Q とする。

- (1) $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ となる実数 a , b を p を用いて表せ。
- (2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

▶ 解法 1 (平面内の係数と垂直条件を使う)

【方針】

点 Q は平面 α 上にあるので、 $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ とおける。垂線の足であることは、 $\overrightarrow{PQ}$ が平面内の 2 方向 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ の両方に垂直であることに言い換える。これで a, b の連立一次方程式を作り、最後に三角形 OAB の周または内部にある条件 $a \geq 0, b \geq 0, a + b \leq 1$ を適用する。

【解答】

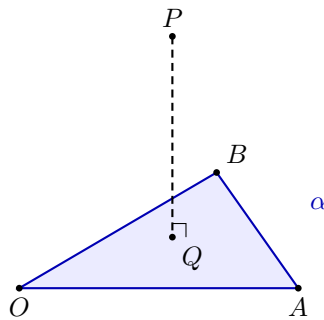
(1)

$$\overrightarrow{OA} = (-1, 2, 0), \quad \overrightarrow{OB} = (2, -2, 1), \quad \overrightarrow{OP} = (p, -1, 2)$$

である。点 Q は平面 α 上にあるから $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ とおける。このとき $\overrightarrow{OQ} = (-a + 2b, 2a - 2b, b)$ である。 Q は P から平面 α へ下ろした垂線の足なので、 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ は平面 α に垂直である。したがって

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OA} = 0, \quad (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0$$

である。ここで $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = (p + a - 2b, -1 - 2a + 2b, 2 - b)$ だから、内積を計算して $-p - 2 - 5a + 6b = 0$, $2p + 4 + 6a - 9b = 0$ を得る。これを解くと $a = \frac{p+2}{3}$, $b = \frac{4p+8}{9}$ である。



(2) Q が三角形 OAB の周または内部にあることは、係数表示 $\overrightarrow{OQ} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ において $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b \leq 1$ が成り立つことと同値である。

(1) の結果を代入すると、まず $\frac{p+2}{3} \geq 0$ より $p \geq -2$ であり、 $\frac{4p+8}{9} \geq 0$ から同じく $p \geq -2$ を得る。また $a + b = \frac{p+2}{3} + \frac{4p+8}{9} = \frac{7(p+2)}{9}$ なので、 $a + b \leq 1$ は $\frac{7(p+2)}{9} \leq 1$ すなわち $p \leq -\frac{5}{7}$ である。もともと p は負の実数であり、この範囲はその条件も満たす。よって求める範囲は $-2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$ である。

▶ 解法 2 (平面方程式から射影する)

【方針】

平面の法線ベクトルを、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ の両方と内積が 0 になる条件から求める。点 P から法線方向へ動かして垂線の足 Q を出し、その座標を平面内の係数 a, b に戻す。

【解答】

(1)

法線ベクトルを (u, v, w) とすると

$$-u + 2v = 0, \quad 2u - 2v + w = 0$$

であるから、 $(u, v, w) = (2, 1, -2)$ と取れる。平面 α は原点を通るので

$$2x + y - 2z = 0$$

である。点 Q を

$$Q = P + \lambda(2, 1, -2)$$

とおき、平面の式へ代入すると

$$2(p + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - 2(2 - 2\lambda) = 0$$

より $\lambda = (5 - 2p)/9$ である。したがって

$$Q = \left(\frac{5p + 10}{9}, -\frac{2p + 4}{9}, \frac{4p + 8}{9} \right).$$

一方、

$$Q = (-a + 2b, 2a - 2b, b)$$

だから、第 3 成分と第 2 成分を順に比較して

$$b = \frac{4p + 8}{9}, \quad a = \frac{p + 2}{3}.$$

(2)

三角形 OAB の周または内部にある条件は

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b \leq 1.$$

上の値を代入すると

$$p \geq -2, \quad p \geq -2, \quad \frac{7(p + 2)}{9} \leq 1.$$

よって

$$-2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 15 分。射影点を平面内の基底 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で表し、垂直条件を内積 2 本に直すのが中心である。計算量は標準的だが、 $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ と $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ の向きが混ざっても内積 0 の条件は同じなので、式の符号を途中で一貫させることが重要である。最後は三角形内部の条件を a, b の非負性と $a + b \leq 1$ で処理する。 $p < 0$ は最終範囲が自動的に満たしているが、確認を一言添えると答案が安定する。

【第 2 問】

x を正の実数とし、座標平面上に 3 点 $A(x, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(-3, 3)$ をとる。直線 AB と直線 AC のなす角を θ とする。ただし、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。

- (1) $\tan \theta$ を x で表せ。
 (2) $x > 0$ における $\tan \theta$ の最大値およびそのときの x の値を求めよ。

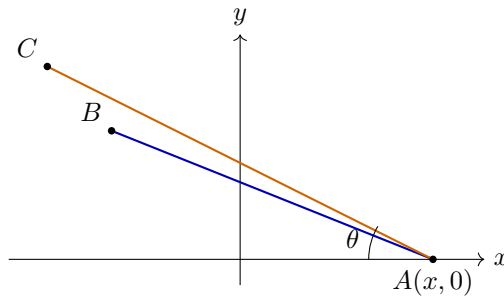
▶ 解法 1 (2 直線の傾きから求める)

【方針】

点 A から見た 2 直線 AB, AC の傾きを求め、2 直線のなす角の公式で $\tan \theta$ を作る。 $x > 0$ では分母が正で、角も鋭角とされているため、絶対値の外し方を確認する。得られた $\frac{x}{x^2 + 5x + 12}$ を微分し、端で 0 に近づくことも見て最大値を確定する。

【解答】

(1) 直線 AB の傾きは $\frac{2-0}{-2-x} = -\frac{2}{x+2}$ であり、直線 AC の傾きは $\frac{3-0}{-3-x} = -\frac{3}{x+3}$ である。これらをそれぞれ m_1, m_2 とおくと、2 直線のなす角 θ について $\tan \theta = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \right|$ である。 $x > 0$ より $(x+2)(x+3) > 0$ であり、
 $m_2 - m_1 = -\frac{3}{x+3} + \frac{2}{x+2} = -\frac{x}{(x+2)(x+3)}$ また $1 + m_1 m_2 = 1 + \frac{6}{(x+2)(x+3)} = \frac{x^2 + 5x + 12}{(x+2)(x+3)}$ である。したがって $\tan \theta = \frac{x}{x^2 + 5x + 12}$ である。



(2) $T(x) = \frac{x}{x^2 + 5x + 12}$ ($x > 0$) とおく。微分すると

$$T'(x) = \frac{x^2 + 5x + 12 - x(2x + 5)}{(x^2 + 5x + 12)^2} = \frac{12 - x^2}{(x^2 + 5x + 12)^2}$$

である。分母は正なので、 $T'(x) > 0$ は $0 < x < 2\sqrt{3}$ 、 $T'(x) < 0$ は $x > 2\sqrt{3}$ である。

また $x \rightarrow 0+0$ で $T(x) \rightarrow 0$ 、 $x \rightarrow \infty$ で $T(x) \rightarrow 0$ であるから、最大となるのは $x = 2\sqrt{3}$ のときである。このとき

$$T(2\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{24 + 10\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{24 + 10\sqrt{3}} \cdot \frac{24 - 10\sqrt{3}}{24 - 10\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3} - 5}{23}$$

となる。よって $x = 2\sqrt{3}$, $(\tan \theta)_{\max} = \frac{4\sqrt{3} - 5}{23}$ である。

▶ 解法 2 (方向ベクトルの内積と面積比を使う)

【方針】

2 本の方向ベクトルのなす角について、「正弦に対応する行列式の絶対値」を「余弦に対応する内積」で割る。最大化は微分せず、分母を $x + 12/x$ の相加平均・相乗平均で評価する。

【解答】

(1)

点 A からの方向ベクトルを

$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = (-x-2, 2), \quad \mathbf{v} = \overrightarrow{AC} = (-x-3, 3)$$

とする。 $0 < \theta < \pi/2$ なので $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ であり、

$$\tan \theta = \frac{|u_1 v_2 - u_2 v_1|}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}} = \frac{x}{(x+2)(x+3)+6} = \frac{x}{x^2+5x+12}.$$

(2)

$$\tan \theta = \frac{1}{x+5+\frac{12}{x}}.$$

$x > 0$ だから、相加平均・相乗平均の関係より

$$x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$$

であり、等号は $x = 2\sqrt{3}$ のときに成立する。したがって

$$\max \tan \theta = \frac{1}{5+4\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}-5}{23}, \quad x = 2\sqrt{3}.$$

【総評】 難度 5、目安時間 12 分。傾きから角の正接を出す標準問題である。 $m_2 - m_1$ は負になるが、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan \theta$ は正であり、絶対値で処理する必要がある。最大化では微分後の分母が常に正であること、端では値が 0 に近づくことを確認すると、 $x = 2\sqrt{3}$ が本当に最大であると説明できる。最後の有理化は計算ミスが出やすいので、値とそのときの x を分けて書くとよい。

【第 3 問】

n を自然数とする。数列 2, 1, 2, 1, 1 のように各項が 1 または 2 の有限数列 (項の個数が有限である数列) を考える。各項が 1 または 2 の有限数列のうちすべての項の和が n となるものの個数を s_n とする。例えば、 $n = 1$ のときは、1 項からなる数列 1 のみである。したがって、 $s_1 = 1$ となる。 $n = 2$ のときは、1 項からなる数列 2 と 2 項からなる数列 1, 1 の 2 つである。したがって、 $s_2 = 2$ となる。

(1) s_3 を求めよ。

(2) $n \geq 3$ のとき、 s_n を s_{n-1} と s_{n-2} を用いて表せ。

(3) 3 以上のすべての n の対して $s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$ が成り立つような実数 α, β の組 (α, β) を 1 組求めよ。

(4) s_n を求めよ。

▶ 解法 1 (フィボナッチ型漸化式を解く)

【方針】

和が n になる数列を最後の項で分類する。最後が 1 なら直前までの和は $n-1$ 、最後が 2 なら直前までの和は $n-2$ なので、フィボナッチ型の漸化式が得られる。(3) は $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ を指定の形に因数分解するため、 $1 - \alpha = \beta, -\alpha\beta = 1$ を満たす組を選ぶ。最後は初期値 $s_1 = 1, s_2 = 2$ から一般項を決める。

【解答】

(1) 和が 3 となる数列は $(1, 1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ の 3 つである。したがって $s_3 = 3$ である。

(2) $n \geq 3$ とする。和が n となる数列を、最後の項が 1 であるものと 2 であるものに分ける。

最後の項が 1 であるなら、それを取り除いた残りの和は $n - 1$ である。したがってその個数は s_{n-1} である。最後の項が 2 であるなら、それを取り除いた残りの和は $n - 2$ であり、その個数は s_{n-2} である。この 2 種類は重ならないので $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ ($n \geq 3$) である。

(3) (2) より $s_n - \alpha s_{n-1} = (1 - \alpha)s_{n-1} + s_{n-2}$ である。これが $\beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2}) = \beta s_{n-1} - \alpha \beta s_{n-2}$ と一致すればよい。したがって $1 - \alpha = \beta$, $1 = -\alpha \beta$ を満たす α, β を取ればよい。これは $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \beta = -1$ と同値である。例えば $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ はこの条件を満たす。

(4) $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ とする。この 2 数は $r^2 = r + 1$ の 2 解である。漸化式 $s_n = s_{n-1} + s_{n-2}$ の形から $s_n = A\alpha^n + B\beta^n$ とおける。初期値 $s_1 = 1, s_2 = 2$ を用いると $A\alpha + B\beta = 1$, $A\alpha^2 + B\beta^2 = 2$ である。これを解くと、同値に $s_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$ となる。 $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ だから

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

である。

▶ 解法 2 (与えられた一次漸化式を反復する)

【方針】

最後の項による分類で漸化式を作った後、(3) で得た因数分解型の漸化式をそのまま反復する。特性方程式の一般論に頼らず、 α, β の 2 通りの関係を連立して一般項を決める。

【解答】

(1)

$(1, 1, 1), (1, 2), (2, 1)$ の 3 通りなので

$$s_3 = 3.$$

(2)

最後の項が 1 なら、それを除いた部分の和は $n - 1$ 、最後の項が 2 なら和は $n - 2$ である。よって

$$s_n = s_{n-1} + s_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

(3)

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

とすれば $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \beta = -1$ だから、

$$s_n - \alpha s_{n-1} = \beta(s_{n-1} - \alpha s_{n-2})$$

が成り立つ。

(4)

上式を反復すると

$$s_n - \alpha s_{n-1} = \beta^{n-2}(s_2 - \alpha s_1) = \beta^{n-2}(2 - \alpha).$$

$2 - \alpha = \beta^2$ より

$$s_n - \alpha s_{n-1} = \beta^n.$$

α, β を入れ替えて同様に

$$s_n - \beta s_{n-1} = \alpha^n.$$

2 式の差を取れば

$$(\alpha - \beta)s_{n-1} = \alpha^n - \beta^n$$

だから

$$s_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}.$$

なお、2 を k 個含む場合の並べ方を数えると

$$s_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} n-k C_k$$

とも表せ、一般項の独立な確認になる。

【総評】 難度 5、目安時間 14 分。最後の項による分類で漸化式を作るところが本体で、以後はフィボナッチ型数列の処理である。(3) は特性方程式を知っていればすぐだが、答案では $1 - \alpha = \beta$ 、 $1 - \alpha\beta$ の係数比較を明示すると説得力がある。一般項では指数が n ではなく $n+1$ になる点を初期値で確認したい。数列を列挙する (1) でも、(1, 2) と (2, 1) を別物として数えることが前提である。

【第 4 問】

実数 a, b, c に対し、関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ を考える。1 次関数 $g(x)$ があり、 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ は、すべての x に対し等式 $f(x) = f'(x)g(x) - 6x$ を満たしているとする。

(1) b と c を a で表せ。

(2) 3 次方程式 $f(x) = 0$ が異なる 3 個の実数解をもつように、 a の値の範囲を定めよ。

▶ 解法 1 (極大値・極小値の符号を見る)

【方針】

$g(x) = mx + n$ とおいて恒等式を係数比較し、まず m, n, b, c を順に決める。得られた $f(x)$ は $x - a$ で平行移動すると $u^3 - 9u - 6a$ という簡単な形になる。3 次方程式が異なる 3 個の実数解をもつ条件は、極大値が正かつ極小値が負であることなので、端点で重解になる場合を除いて a の範囲を出す。

【解答】

(1) $g(x) = mx + n$ とおく。 $f'(x) = 3x^2 - 6ax + b$ であるから $f'(x)g(x) - 6x = (3x^2 - 6ax + b)(mx + n) - 6x$ である。これが $f(x) = x^3 - 3ax^2 + bx + c$ に恒等的に等しいので、係数を比較する。 x^3 の係数から $3m = 1$ より $m = \frac{1}{3}$ である。 x^2 の係数から $3n - 6am = -3a$ であり、 $m = \frac{1}{3}$ を代入して $3n - 2a = -3a$ すなわち $n = -\frac{a}{3}$ を得る。 x の係数を比べる $bm - 6an - 6 = b$ である。ここに $m = \frac{1}{3}, n = -\frac{a}{3}$ を代入して $\frac{b}{3} + 2a^2 - 6 = b$ となるので $b = 3a^2 - 9 = 3(a^2 - 3)$ である。最後に定数項から $c = bn = 3(a^2 - 3)\left(-\frac{a}{3}\right) = -a(a^2 - 3)$ である。したがって $b = 3(a^2 - 3), c = -a(a^2 - 3)$ である。

(2) (1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3ax^2 + 3(a^2 - 3)x - a(a^2 - 3) \\ &= (x - a)^3 - 9x + 3a \end{aligned}$$

である。 $u = x - a$ とおくと、 $x = u + a$ だから $f(x) = u^3 - 9u - 6a$ となる。よって方程式 $f(x) = 0$ は $u^3 - 9u - 6a = 0$ と同値である。 $F(u) = u^3 - 9u - 6a$ とおくと $F'(u) = 3u^2 - 9 = 3(u^2 - 3)$ である。したがって $F(u)$ は $u = -\sqrt{3}$ で極大、 $u = \sqrt{3}$ で極小をとる。極大値は $F(-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 6a = 6(\sqrt{3} - a)$ であり、極小値は $F(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} - 6a = -6(\sqrt{3} + a)$ である。

3 次方程式が異なる 3 個の実数解をもつためには、極大値が正で、極小値が負であればよい。よって $6(\sqrt{3} - a) > 0$, $-6(\sqrt{3} + a) < 0$ であり、これは $a < \sqrt{3}$, $a > -\sqrt{3}$ と同値である。端点では極値が 0 となり重解をもつため、「異なる 3 個」にはならない。したがって $-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$ である。

▶ 解法 2 (三次関数と水平線の交点を見る)

【方針】

係数比較で b, c を決め、 $u = x - a$ と平行移動する。方程式を固定した三次曲線 $y = u^3 - 9u$ と水平線 $y = 6a$ の交点として判定する。

【解答】

(1)

$g(x) = mx + n$ とおく。恒等式の係数比較から

$$\begin{aligned} 3m &= 1, & 3n - 6am &= -3a, \\ bm - 6an - 6 &= b, & bn &= c. \end{aligned}$$

上から順に解けば

$$m = \frac{1}{3}, \quad n = -\frac{a}{3}, \quad b = 3(a^2 - 3), \quad c = -a(a^2 - 3).$$

(2)

$u = x - a$ とおくと

$$f(x) = u^3 - 9u - 6a,$$

したがって $f(x) = 0$ は $u^3 - 9u = 6a$ と同値である。

$$h(u) = u^3 - 9u, \quad h'(u) = 3(u^2 - 3)$$

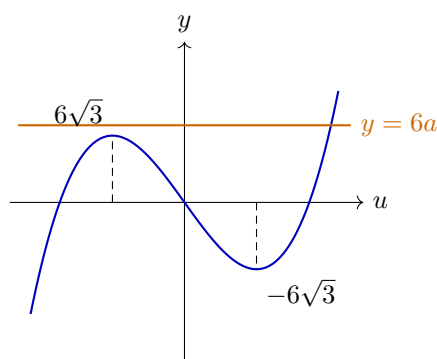
より、 h の極大値は $6\sqrt{3}$ 、極小値は $-6\sqrt{3}$ である。よって水平線 $y = 6a$ が異なる 3 点で交わる条件は

$$-6\sqrt{3} < 6a < 6\sqrt{3}.$$

したがって

$$-\sqrt{3} < a < \sqrt{3}$$

である。



【総評】 難度 7、目安時間 22 分。恒等式の係数比較で m, n から順に決める計算力と、得られた三次式を $x - a$ で整理する発想が必要である。 $f(x) = (x - a)^3 - 9x + 3a$ のままでも解けるが、 $u = x - a$ にすると極値が $\pm\sqrt{3}$ に固定され、 a は上下移動の役割だけになる。採点では、 x の係数比較で $-6x$ を落とさないこと、極大値・極小値の符号条件を厳密不等号にすること、端点が重解で除外されることが重要である。