

入 学 試 験 問 題

数 学



北 海 道 大 学 2019 年 度 理 系 (後 期)

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n を 3 以上の自然数とする。当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある。くじを引いて、当たりなら持ち点に 1 を加算し、はずれなら持ち点は変わらないとする。最初の持ち点は 0 とし、くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す。

k を 0 以上の整数とする。 n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする。

- (1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ を求めよ。ただし、 e を自然対数の底とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてもよい。
- (3) $p(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ と定める。値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ。

第 2 問

a, t は実数で, a は 1 以上とする。座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(a, a - 1)$, $P(t, t^2 + 1)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を (X, Y) とする。

- (1) X と Y を, a と t を用いて表せ。
- (2) $a = 1$ とする。 t が実数全体を動くとき, G の軌跡を求め, 座標平面上に図示せよ。
- (3) a が 1 以上の実数全体を, t が実数全体を動くとき, G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ。

第 3 問

r を正の実数とする。複素数平面上に、点 α を中心とする半径 r の円 C がある。ただし、 C は原点を通らないものとする。点 z が円 C 上を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ の描く図形を C' とする。

- (1) C' は円であることを示せ。さらに、 C' の中心と半径を α と r で表せ。
- (2) C と C' が一致するとき、 C の中心 α は実軸上または虚軸上にあることを示せ。

第 4 問

関数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) と

$$g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (t \geq 0)$$

を考える。ただし、 e は自然対数の底とする。

(1) $g(t) \geq 1$ を示せ。

(2) $a > 0$ とする。次の定積分を求めよ。

$$\int_0^a f(g(t))g'(t) dt$$

(3) 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $p > 1$ とし、 C 上の点 $(p, f(p))$ における接線を l とする。このとき、曲線 C 、直線 l 、 x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)