

北海道大学 2019 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n を 3 以上の自然数とする。当たりくじ 2 本を含む n 本のくじがある。くじを引いて、当たりなら持ち点に 1 を加算し、はずれなら持ち点は変わらないとする。最初の持ち点は 0 とし、くじを引いてはもどすという試行を n 回繰り返す。

k を 0 以上の整数とする。 n 回の試行が終了した時点の持ち点が k となる確率を $p_n(k)$ とする。

(1) 確率 $p_n(k)$ を求めよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ を求めよ。ただし、 e を自然対数の底とすると、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2}$ であることを用いてもよい。

(3) $p(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k)$ と定める。値 $p(k)$ が最大となるような k の値を求めよ。

▶ 解法 1 (二項分布と隣接比を使う)

【方針】

1 回の試行で当たりを引く確率は $\frac{2}{n}$ で、くじを戻すため各試行は独立に同じ確率で行われる。したがって (1) は二項分布で表せる。(2) では k を固定して、二項係数部分と $(1 - \frac{2}{n})^{n-k}$ を分けて極限を取る。(3) は極限值 $p(k)$ の隣り合う項の比 $p(k+1)/p(k)$ を調べ、増加・同値・減少の切り替わりから最大となる k を決める。

【解答】

(1) 1 回の試行で当たりくじを引く確率は $\frac{2}{n}$ であり、はずれを引く確率は $1 - \frac{2}{n}$ である。くじは毎回戻すので、各試行は同じ確率で独立に行われる。したがって、 n 回中ちょうど k 回当たりを引く確率は、 $0 \leq k \leq n$ のとき

$$p_n(k) = {}_nC_k \left(\frac{2}{n}\right)^k \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-k}$$

である。 $k < 0$ または $k > n$ のときは、そのような回数は起こらないので $p_n(k) = 0$ である。

(2) k を固定して $n \rightarrow \infty$ とする。まず

$${}_nC_k \left(\frac{2}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{2^k}{n^k}$$

であるから ${}_nC_k \left(\frac{2}{n}\right)^k \rightarrow \frac{2^k}{k!}$ である。また

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-k}$$

であり、問題文で与えられた極限より

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \rightarrow e^{-2}, \quad \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-k} \rightarrow 1$$

である。したがって $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}$ である。

(3) $p(k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}$ である。隣り合う項の比をとると

$$\frac{p(k+1)}{p(k)} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1}$$

である。

したがって $k=0$ から $k=1$ へは $\frac{p(1)}{p(0)} = 2 > 1$ なので増加する。 $k=1$ から $k=2$ へは $\frac{p(2)}{p(1)} = 1$ なので等しい。 $k \geq 2$

では $\frac{p(k+1)}{p(k)} < 1$ なので減少する。よって最大となる k は $k=1, 2$ である。

▶ 解法 2 (隣接差で最大値を判定する)

【方針】

(1)(2) は成功回数を直接数えて極限を取る。(3) では隣接比の代わりに $p(k+1) - p(k)$ を計算し、その符号が $k=1$ を境に変わることを見る。

【解答】

(1)

当たりを引く回を k 回選び、それぞれの試行確率を掛けると

$$p_n(k) = {}_n C_k \left(\frac{2}{n}\right)^k \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-k} \quad (0 \leq k \leq n).$$

それ以外の k では $p_n(k) = 0$ である。

(2)

k を固定すると

$${}_n C_k \left(\frac{2}{n}\right)^k = \frac{2^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \rightarrow \frac{2^k}{k!},$$

また

$$\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-k} = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-k} \rightarrow e^{-2}.$$

したがって

$$p(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(k) = e^{-2} \frac{2^k}{k!}.$$

(3)

$$\begin{aligned} p(k+1) - p(k) &= e^{-2} \left\{ \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{2^k}{k!} \right\} \\ &= e^{-2} \frac{2^k}{(k+1)!} (1 - k). \end{aligned}$$

よって $k=0$ では増加、 $k=1$ では同値、 $k \geq 2$ では減少する。したがって最大となるのは

$$k = 1, 2$$

である。

【総評】 難度 5、目安時間 14 分。くじを戻すため二項分布になることを最初に確認できれば、全体の流れは標準的である。極限では k を固定しているので、二項係数の上側 $n(n-1)\cdots$ を n^k で割る形に直すと見通しがよい。(3) は値を直接比較するより、隣接比 $2/(k+1)$ で増減を判定するのが安全である。 $k=1$ と $k=2$ が同じ最大値になる点を落としやすい。

【第 2 問】

a, t は実数で、 a は 1 以上とする。座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(a, a-1)$, $P(t, t^2+1)$ を頂点とする三角形の重心 G の座標を (X, Y) とする。

- (1) X と Y を、 a と t を用いて表せ。
- (2) $a = 1$ とする。 t が実数全体を動くとき、 G の軌跡を求め、座標平面上に図示せよ。
- (3) a が 1 以上の実数全体を、 t が実数全体を動くとき、 G が通過する範囲を座標平面上に図示せよ。

▶ 解法 1 (固定した X で t を最小化する)

【方針】

重心公式から X, Y を a, t で表す。(2) は $a = 1$ として $t = 3X - 1$ を消去すれば放物線になる。(3) では $a = 3X - t$ と消去し、条件 $a \geq 1$ を $t \leq 3X - 1$ と読む。固定した X に対して $Y = \frac{t^2 - t + 3X}{3}$ の最小値を、頂点 $t = \frac{1}{2}$ が許されるかどうかで場合分けする。

【解答】

(1) 3 点 $O(0, 0)$, $A(a, a-1)$, $P(t, t^2+1)$ の重心が $G(X, Y)$ であるから $X = \frac{0+a+t}{3} = \frac{a+t}{3}$ であり、 $Y = \frac{0+(a-1)+(t^2+1)}{3} = \frac{a+t^2}{3}$ である。したがって $X = \frac{a+t}{3}$, $Y = \frac{a+t^2}{3}$ である。

(2) $a = 1$ のとき $X = \frac{1+t}{3}$, $Y = \frac{1+t^2}{3}$ である。 $t = 3X - 1$ を代入すると $Y = \frac{1+(3X-1)^2}{3}$ である。 t は実数全体を動くので、 X も実数全体を動く。したがって軌跡は $Y = \frac{1+(3X-1)^2}{3}$ で表される放物線全体である。これは下に凸で、頂点は $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ である。

(3) (1) より $a = 3X - t$ である。条件 $a \geq 1$ は $3X - t \geq 1$ すなわち $t \leq 3X - 1$ である。また $Y = \frac{a+t^2}{3} = \frac{3X-t+t^2}{3} = \frac{t^2-t+3X}{3}$ である。

ここで X を固定して、 $t \leq 3X - 1$ のもとで Y の最小値を調べる。二次式 $t^2 - t + 3X = (t - \frac{1}{2})^2 + 3X - \frac{1}{4}$ の頂点は $t = \frac{1}{2}$ である。 $X \geq \frac{1}{2}$ のときは $\frac{1}{2} \leq 3X - 1$ であり、 $t = \frac{1}{2}$ が許される。したがって $Y \geq \frac{3X - \frac{1}{4}}{3} = X - \frac{1}{12}$ である。 $X < \frac{1}{2}$ のときは $3X - 1 < \frac{1}{2}$ であり、許される範囲 $t \leq 3X - 1$ では二次式は右端 $t = 3X - 1$ で最小となる。したがって $Y \geq \frac{(3X-1)^2 - (3X-1) + 3X}{3} = 3X^2 - 2X + \frac{2}{3}$ である。

以上より、 G が通過する範囲は

$$\begin{cases} Y \geq 3X^2 - 2X + \frac{2}{3} & (X < \frac{1}{2}), \\ Y \geq X - \frac{1}{12} & (X \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

である。図示すると、 $X < \frac{1}{2}$ では放物線 $Y = 3X^2 - 2X + \frac{2}{3}$ の上側、 $X \geq \frac{1}{2}$ では直線 $Y = X - \frac{1}{12}$ の上側であり、2 つの境界は $X = \frac{1}{2}$ でつながる。

▶ 解法 2 (固定した X で a を最小化する)

【方針】

$t = 3X - a$ と消去し、固定した X に対して Y を $a \geq 1$ の二次関数とみなす。頂点が許容範囲に入るかを $X = 1/2$ で場合分けする。

【解答】

(1)

重心公式より

$$X = \frac{a+t}{3}, \quad Y = \frac{a+t^2}{3}.$$

(2)

$a = 1$ なら $t = 3X - 1$ だから

$$Y = \frac{1 + (3X - 1)^2}{3} \quad (X \in \mathbb{R}).$$

頂点 $(1/3, 1/3)$ の放物線全体である。

(3)

$t = 3X - a$ を Y に代入すると

$$Y = \frac{a + (3X - a)^2}{3} = \frac{(a - 3X + 1/2)^2 + 3X - 1/4}{3}.$$

固定した X に対し、 $a \geq 1$ のもとで右辺の最小値を求める。

$X \geq 1/2$ なら頂点 $a = 3X - 1/2$ が許されるので

$$Y \geq X - \frac{1}{12}.$$

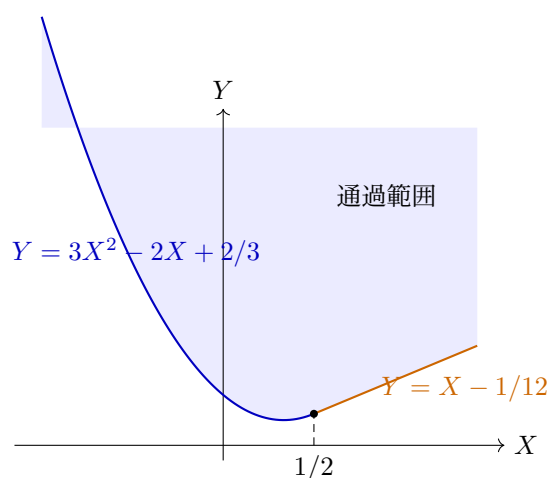
$X < 1/2$ なら頂点は $a < 1$ にあり、 $a \geq 1$ では $a = 1$ のとき最小となる。よって

$$Y \geq \frac{1 + (3X - 1)^2}{3} = 3X^2 - 2X + \frac{2}{3}.$$

したがって通過範囲は

$$\begin{cases} Y \geq 3X^2 - 2X + \frac{2}{3} & (X < \frac{1}{2}), \\ Y \geq X - \frac{1}{12} & (X \geq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

である。



【総評】 難度 6、目安時間 18 分。2 変数 a, t が動く通過範囲は、 X を固定して Y の下限を求めると整理しやすい。条件 $a \geq 1$ を $t \leq 3X - 1$ に変換するところが核心である。 $X = \frac{1}{2}$ を境に、二次式の頂点 $t = \frac{1}{2}$ が許されるかどうかが変わるため、ここで場合分けが必要になる。図示では境界線だけでなく、その上側全体であることを明示したい。

【第 3 問】

r を正の実数とする。複素数平面上に、点 α を中心とする半径 r の円 C がある。ただし、 C は原点を通らないものとする。点 z が円 C 上を動くとき、点 $w = \frac{1}{z}$ の描く図形を C' とする。

- (1) C' は円であることを示せ。さらに、 C' の中心と半径を α と r で表せ。
 (2) C と C' が一致するとき、 C の中心 α は実軸上または虚軸上にあることを示せ。

▶ 解法 1 (複素数の円の方程式を使う)

【方針】

円 C は $|z - \alpha| = r$ と書ける。 $w = 1/z$ なので $z = 1/w$ を代入し、 $|1 - \alpha w| = r|w|$ を 2 乗して w の円の方程式に整理する。原点を通らない条件から $|\alpha| \neq r$ であり、2 次の係数で割って中心と半径を読む。(2) は、円が一致するなら半径と中心が一致するので、 $\delta = |\alpha|^2 - r^2$ が 1 または -1 の場合に分けて、 $\alpha = \bar{\alpha}$ または $\alpha = -\bar{\alpha}$ を導く。

【解答】

(1) 円 C の方程式は $|z - \alpha| = r$ である。 $w = \frac{1}{z}$ だから $z = \frac{1}{w}$ であり、これを代入すると $|\frac{1}{w} - \alpha| = r$ である。両辺に $|w|$ を掛けて $|1 - \alpha w| = r|w|$ を得る。両辺を 2 乗すると $(1 - \alpha w)(1 - \bar{\alpha} \bar{w}) = r^2 |w|^2$ であり、整理して $(|\alpha|^2 - r^2)|w|^2 - \alpha w - \bar{\alpha} \bar{w} + 1 = 0$ となる。

ここで、円 C は原点を通らないので $|\alpha| \neq r$ である。したがって $\delta = |\alpha|^2 - r^2$ とおくと、 $\delta \neq 0$ である。方程式を δ で割ると

$$|w|^2 - \frac{\alpha}{\delta} w - \frac{\bar{\alpha}}{\delta} \bar{w} + \frac{1}{\delta} = 0$$

である。これは

$$\left| w - \frac{\bar{\alpha}}{\delta} \right|^2 = \frac{|\alpha|^2}{\delta^2} - \frac{1}{\delta} = \frac{r^2}{\delta^2}$$

と書ける。よって C' は円であり、その中心は $\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$ 、半径は $\frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$ である。

(2) C と C' が一致するとする。半径が等しいので $r = \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$ である。 $r > 0$ より $||\alpha|^2 - r^2| = 1$ である。すなわち $|\alpha|^2 - r^2 = \pm 1$ である。 $|\alpha|^2 - r^2 = 1$ のとき、中心が一致する条件は $\alpha = \bar{\alpha}$ である。したがって α は実数であり、中心は実軸上にある。 $|\alpha|^2 - r^2 = -1$ のとき、中心が一致する条件は $\alpha = -\bar{\alpha}$ である。したがって α は純虚数であり、中心は虚軸上にある。

以上より、 $C = C'$ ならば、円 C の中心 α は実軸上または虚軸上にあることが示された。

▶ 解法 2 (実部・虚部の座標で平方完成する)

【方針】

$\alpha = a + bi$, $w = u + iv$ とおき、 $z = 1/w$ の実部・虚部を円の方程式へ代入する。実座標の円の標準形に直して中心と半径を読み、円の一致条件を座標ごとに比較する。

【解答】

(1)

$$\alpha = a + bi, \quad w = u + iv, \quad \rho^2 = u^2 + v^2$$

とおく。 $z = 1/w$ だから

$$z = \frac{u - iv}{u^2 + v^2},$$

すなわち $z = x + iy$ とすれば

$$x = \frac{u}{\rho^2}, \quad y = -\frac{v}{\rho^2}.$$

円 C の方程式

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

へ代入し、 ρ^2 を掛けて整理すると

$$(a^2 + b^2 - r^2)(u^2 + v^2) - 2au + 2bv + 1 = 0.$$

$\delta = a^2 + b^2 - r^2 = |\alpha|^2 - r^2$ とおく。原点が C 上にないので $\delta \neq 0$ である。平方完成により

$$\left(u - \frac{a}{\delta}\right)^2 + \left(v + \frac{b}{\delta}\right)^2 = \frac{r^2}{\delta^2}.$$

よって中心と半径はそれぞれ

$$\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}, \quad \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}.$$

(2)

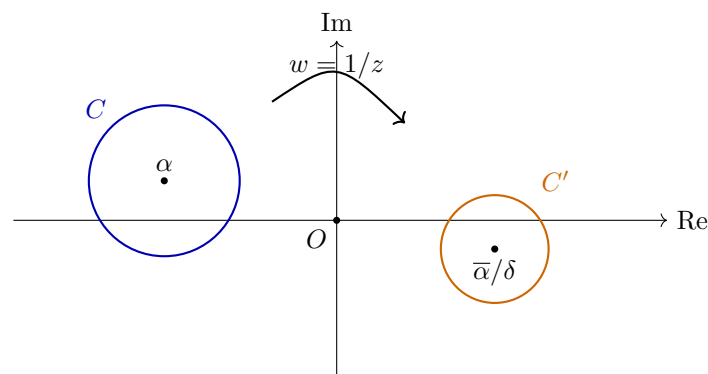
$C = C'$ なら半径の一致から $|\delta| = 1$ である。

$\delta = 1$ のとき、中心

$$(a, b) = \left(\frac{a}{\delta}, -\frac{b}{\delta}\right)$$

の比較から $b = 0$ となり、 α は実軸上にある。

$\delta = -1$ のときは同じ比較から $a = 0$ となり、 α は虚軸上にある。したがって題意が示された。



【総評】 難度 7、目安時間 24 分。反転 $w = 1/z$ による円の像を、複素数の方程式で処理する問題である。 $|1 - \alpha w| = r|w|$ まで変形できれば、あとは円の標準形に平方完成するだけだが、中心が α ではなく $\bar{\alpha}$ を含む点に注意する。原点を通らない条件は $|\alpha| \neq r$ として、2 次の係数が 0 でないことを保証している。(2) では半径一致から $|\alpha|^2 - r^2 = \pm 1$ に分けるのが自然で、中心一致から実軸・虚軸の結論が出る。

【第 4 問】

関数 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ($x \geq 1$) と

$$g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad (t \geq 0)$$

を考える。ただし、 e は自然対数の底とする。

(1) $g(t) \geq 1$ を示せ。

(2) $a > 0$ とする。次の定積分を求めよ。

$$\int_0^a f(g(t))g'(t) dt$$

(3) 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。 $p > 1$ とし、 C 上の点 $(p, f(p))$ における接線を l とする。このとき、曲線 C 、直線 l 、 x 軸で囲まれた図形の面積 S を p で表せ。

▶ 解法 1 (指数関数型の置換を使う)

【方針】

$g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ は $t \geq 0$ で 1 以上となり、さらに $g'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0$ を満たす。 $g(t)^2 - 1 = (g'(t))^2$ なので、(2) は $f(g(t)) = g'(t)$ として積分する。(3) では $p = g(a)$ 、 $\sqrt{p^2 - 1} = g'(a)$ とおき、接線と x 軸でできる三角形の面積から、曲線下の面積

$$\int_1^p \sqrt{x^2 - 1} dx$$

を引く。

【解答】

(1) 相加平均・相乗平均の関係より、 $t \geq 0$ で $g(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \geq \sqrt{e^t e^{-t}} = 1$ である。したがって $g(t) \geq 1$ である。

(2) $g'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ である。また

$$\begin{aligned} g(t)^2 - 1 &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 - 1 \\ &= \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} \\ &= \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

である。 $t \geq 0$ では $g'(t) \geq 0$ だから $f(g(t)) = \sqrt{g(t)^2 - 1} = g'(t)$ である。

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^a f(g(t))g'(t) dt &= \int_0^a \{g'(t)\}^2 dt \\ &= \int_0^a \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^a (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) dt \\ &= \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{8} - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

である。よって

$$\int_0^a f(g(t))g'(t) dt = \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{8} - \frac{a}{2}.$$

(3) $q = \sqrt{p^2 - 1}$ とおく。曲線 C 上の点は (p, q) である。 $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ より、この点における接線の傾きは $\frac{p}{q}$ である。

接線の方程式は $y - q = \frac{p}{q}(x - p)$ であり、 x 軸との交点は $y = 0$ として $-q = \frac{p}{q}(x - p)$ より $x = p - \frac{q^2}{p} = p - \frac{p^2 - 1}{p} = \frac{1}{p}$ である。

したがって、接線と x 軸でできる三角形の面積は $\frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) q$ である。この三角形から、 $1 \leq x \leq p$ にある曲線下の面積を引けば、求める面積 S になる。

ここで $p > 1$ なので、ある $a > 0$ が存在して $p = g(a) = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$ と書ける。このとき $q = \sqrt{p^2 - 1} = g'(a)$ である。(2) より、置換 $x = g(t)$ を用いると

$$\int_1^p \sqrt{x^2 - 1} dx = \int_0^a f(g(t))g'(t) dt = \frac{pq - a}{2}$$

である。また $e^a = p + q$ なので $a = \log(p + q) = \log(p + \sqrt{p^2 - 1})$ である。

よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) q - \frac{pq - a}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(a - \frac{q}{p} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \log(p + \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{p} \right\} \end{aligned}$$

である。したがって

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \log(p + \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{p} \right\}$$

である。

▶ 解法 2 (曲線下の面積を部分積分で求める)

【方針】

(1)(2) で指数表示を整理する。(3) では曲線下の面積を $I(p)$ とおき、部分積分と $\log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ の微分を使って直接求め、接線下の三角形から差し引く。

【解答】

(1)

$$e^t + e^{-t} \geq 2\sqrt{e^t e^{-t}} = 2$$

より $g(t) \geq 1$ である。

(2)

$$g'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0, \quad g(t)^2 - 1 = \{g'(t)\}^2$$

だから $f(g(t)) = g'(t)$ である。よって

$$\begin{aligned} \int_0^a f(g(t))g'(t) dt &= \frac{1}{4} \int_0^a (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) dt \\ &= \frac{e^{2a} - e^{-2a}}{8} - \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

(3)

$q = \sqrt{p^2 - 1}$ とおく。接線は

$$y - q = \frac{p}{q}(x - p)$$

であり、 x 軸との交点は $(1/p, 0)$ である。したがって接線下の三角形の面積は

$$T = \frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right) q.$$

曲線下の面積を

$$I(p) = \int_1^p \sqrt{x^2 - 1} dx$$

とする。部分積分し、 $x^2 = (x^2 - 1) + 1$ を使うと

$$I(p) = pq - I(p) - \int_1^p \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

ここで

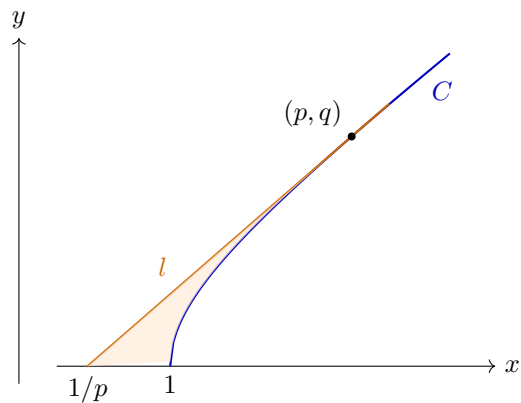
$$\frac{d}{dx} \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

だから

$$I(p) = \frac{1}{2} \left\{ pq - \log(p + \sqrt{p^2 - 1}) \right\}.$$

求める面積は $S = T - I(p)$ なので

$$S = \frac{1}{2} \left\{ \log(p + \sqrt{p^2 - 1}) - \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{p} \right\}.$$



【総評】 難度 7、目安時間 25 分。 $g(t)$ は双曲線関数型の置換だが、答案では指数の式のまま $g(t)^2 - 1 = (g'(t))^2$ を確認すれば高校範囲で処理できる。(2) の積分結果は (3) で曲線下の面積にそのまま使うため、ここを単なる計算で終わらせず、 $x = g(t)$ の置換として意識しておくといよい。(3) では接線の x 軸との交点が $1/p$ になること、求める面積が三角形から曲線下を引いた部分であることを図形的に説明するのが採点上重要である。