

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2019 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。また, 点 P から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を Q とする。

- (1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。
- (2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

第 2 問

n を自然数とし, $a_n = n(n+1)$ とする。さらに, a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

- (1) d_n は偶数であることを示せ。
- (2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ。
- (3) p を 5 以上の素数とすると, d_n は p で割り切れないことを示せ。
- (4) $d_n \leq 12$ を示せ。また, $d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

第 3 問

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。 $0, \frac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

- (1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。
- (2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α ，極小値を与える x の値を β とし，座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha))$ ， $Q(\beta, f(\beta))$ をとる。 t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき，線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

第 4 問

n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり，どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち，A は箱 X から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し，もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし，もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば，その札を箱 Y に戻し，再び箱 Y から札を 1 枚取り出し，取り出した札の番号を B の得点とする。

- (1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。
- (2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

第 5 問

$f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x), f_2(x), \dots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

- (1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。
- (2) $c_n = a_n - 1$ とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。
- (3) a_n, b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)