

北海道大学 2019 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり、3 点 O , A , B が定める平面を α とする。また、点 P から平面 α に垂線を下ろし、 α との交点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。

(2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

▶ 解法 1 (平面内の係数と垂直条件を使う)

【方針】

文系第 1 問と同じ射影の構造で、 Q を $a\vec{OA} + b\vec{OB}$ と表して垂直条件を立てる。理系では (1) が座標を求める設問なので、求めた a, b を必ず座標に戻す。

【解答】

(1)

$$\vec{OA} = (-1, 2, 0), \quad \vec{OB} = (2, -2, 1), \quad \vec{OP} = (p, -1, 2)$$

である。点 Q は平面 α 上にあるから $\vec{OQ} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ とおく。このとき $\vec{OQ} = (-a + 2b, 2a - 2b, b)$ である。 PQ は平面 α に垂直なので、 $\vec{OP} - \vec{OQ}$ は $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ の両方に垂直である。したがって

$$(\vec{OP} - \vec{OQ}) \cdot \vec{OA} = 0, \quad (\vec{OP} - \vec{OQ}) \cdot \vec{OB} = 0$$

である。ここで $\vec{OP} - \vec{OQ} = (p + a - 2b, -1 - 2a + 2b, 2 - b)$ なので、内積を計算して $-p - 2 - 5a + 6b = 0$, $2p + 4 + 6a - 9b = 0$ を得る。これを解くと $a = \frac{p+2}{3}$, $b = \frac{4p+8}{9}$ である。

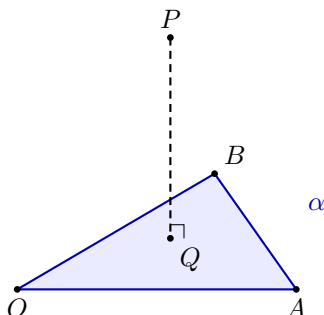
よって

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= \frac{p+2}{3}(-1, 2, 0) + \frac{4p+8}{9}(2, -2, 1) \\ &= \left(\frac{5p+10}{9}, -\frac{2p+4}{9}, \frac{4p+8}{9} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって

$$Q \left(\frac{5p+10}{9}, -\frac{2p+4}{9}, \frac{4p+8}{9} \right)$$

である。



(2) 点 Q が三角形 OAB の周または内部にある条件は $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a + b \leq 1$ である。(1) の a, b を代入すると

$$\frac{p+2}{3} \geq 0, \quad \frac{4p+8}{9} \geq 0, \quad \frac{7(p+2)}{9} \leq 1$$

である。これらはそれぞれ $p \geq -2$, $p \geq -2$, $p \leq -\frac{5}{7}$ を与える。したがって $-2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$ である。

▶ 解法 2 (平面方程式から射影する)

【方針】

平面の法線ベクトルを内積の連立条件で求め、点 P から法線方向へ動かして垂線の足 Q を直接計算する。(2) では Q を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ の係数表示に戻す。

【解答】

(1)

法線ベクトルを (u, v, w) とおくと

$$-u + 2v = 0, \quad 2u - 2v + w = 0$$

だから、 $(2, 1, -2)$ と取れる。平面 α は

$$2x + y - 2z = 0$$

である。 $Q = P + \lambda(2, 1, -2)$ とおいて代入すると

$$2(p + 2\lambda) + (-1 + \lambda) - 2(2 - 2\lambda) = 0,$$

したがって $\lambda = (5 - 2p)/9$ である。よって

$$Q \left(\frac{5p + 10}{9}, -\frac{2p + 4}{9}, \frac{4p + 8}{9} \right).$$

(2)

$Q = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ と表すと、第 3 成分と第 2 成分から

$$b = \frac{4p + 8}{9}, \quad a = \frac{p + 2}{3}.$$

三角形内の条件

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b \leq 1$$

を用いれば

$$p \geq -2, \quad \frac{7(p + 2)}{9} \leq 1.$$

したがって

$$-2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$$

である。

【総評】 難度 6、目安時間 16 分。射影を内積条件で求める方法が最も三角形内条件へつながりやすい。理系の (1) では係数 a, b だけで止めず、 Q の座標まで戻す必要がある。別解の法線ベクトル法は計算が短い一方、(2) では結局 Q を OA, OB の係数に戻す必要があるため、主解の流れの方が採点答案としてはまとまりやすい。符号ミスが起こりやすいので、最後に $p = -2$ で $Q = O$ になることを確認するとよい。

【第 2 問】

n を自然数とし、 $a_n = n(n+1)$ とする。さらに、 a_n と a_{n+3} の最大公約数を d_n とする。

- (1) d_n は偶数であることを示せ。
- (2) d_n は 8 で割り切れないことを示せ。
- (3) p を 5 以上の素数とすると、 d_n は p で割り切れないことを示せ。
- (4) $d_n \leq 12$ を示せ。また、 $d_n = 12$ となるような n を 1 つ求めよ。

▶ 解法 1 (素因数ごとに指数を抑える)

【方針】

$a_n = n(n+1)$ と $a_{n+3} = (n+3)(n+4)$ の共通因数を調べる。まずどちらも偶数であることを確認する。次に 2 の指数は、連続 2 整数の積では偶数側だけを見ればよいので、8 で同時に割れないことを剰余で示す。5 以上の素数は、 $n, n+1$ と $n+3, n+4$ の剰余集合が重ならないことで除外する。最後に 3 の指数だけを 9 で確認し、素因数が 2 と 3 に限られ、指数も $2^2 \cdot 3$ までであることから上限を得る。

【解答】

(1) $a_n = n(n+1)$, $a_{n+3} = (n+3)(n+4)$ である。連続する 2 整数の積は必ず偶数なので、 a_n も a_{n+3} も偶数である。したがって、それらの最大公約数 d_n も偶数である。

(2) 8 で割った余りを考える。連続する 2 整数 $n, n+1$ の一方は奇数であるから、 $n(n+1)$ が 8 で割り切れるためには、偶数である方が 8 で割り切れる必要がある。

もし n が偶数なら、 $n+4$ も偶数であり、 a_n と a_{n+3} の偶数因子はそれぞれ n と $n+4$ である。8 で見れば、数が 4 だけずれているので、この 2 つがともに 8 の倍数になることはない。

もし n が奇数なら、 $n+1$ と $n+3$ が偶数であり、これらは 2 だけずれている。したがって、この 2 つがともに 8 の倍数になることもない。

よって a_n と a_{n+3} がともに 8 で割り切れることはない。したがって、 d_n は 8 で割り切れない。

(3) p を 5 以上の素数とする。仮に p が d_n を割り切るとすると、 $n(n+1) \equiv 0 \pmod{p}$, $(n+3)(n+4) \equiv 0 \pmod{p}$ である。第 1 式より $n \equiv 0, -1 \pmod{p}$ である。一方、第 2 式より $n \equiv -3, -4 \pmod{p}$ である。

しかし $p \geq 5$ なので、剰余 $0, -1, -3, -4$ は法 p で互いに重ならない。したがって両方の条件を同時に満たす n は存在しない。ゆえに、 d_n は p で割り切れない。

(4) (3) より、 d_n の素因数のうち 5 以上の素数は現れない。したがって素因数は 2 と 3 だけである。

(2) より d_n は 8 では割り切れないので、2 の指数は高々 2 である。次に 9 で割り切れるかを調べる。互いに連続する 2 整数は互いに素なので、 $n(n+1)$ が 9 で割り切れるには $n \equiv 0, -1 \pmod{9}$ でなければならない。同様に、 $(n+3)(n+4)$ が 9 で割り切れるには $n \equiv -3, -4 \pmod{9}$ でなければならない。これらの剰余は重ならないので、 a_n と a_{n+3} がともに 9 で割り切れることはない。よって 3 の指数は高々 1 である。

以上より $d_n \leq 2^2 \cdot 3 = 12$ である。実際に $n = 8$ とすると $a_8 = 8 \cdot 9 = 72$, $a_{11} = 11 \cdot 12 = 132$ であり、 $\gcd(72, 132) = 12$ である。したがって $d_n \leq 12$, $d_8 = 12$ である。

▶ 解法 2 (最大公約数を 12 の約数に絞る)

【方針】

2 数の差 $a_{n+3} - a_n = 6(n+2)$ を使って最大公約数を簡約する。さらに $n(n+1)$ と $n+2$ の最大公約数が 2 の約数であることから、最初に $d_n \mid 12$ を導き、各小問を一気に処理する。

【解答】

(1)

$n(n+1)$ と $(n+3)(n+4)$ はどちらも連続 2 整数の積なので偶数である。したがって d_n も偶数である。

以下、

$$A = n(n+1), \quad B = (n+3)(n+4)$$

とおく。差を取ると

$$B - A = 6(n+2)$$

だから

$$d_n = \gcd(A, B) = \gcd(A, 6(n+2)).$$

また、法 $n+2$ で $n \equiv -2$, $n+1 \equiv -1$ より

$$A = n(n+1) \equiv 2 \pmod{n+2}.$$

したがって $h = \gcd(A, n+2)$ は 2 の約数である。 $A = hA_0$, $n+2 = hN_0$ とし $\gcd(A_0, N_0) = 1$ とすれば、 A_0 と $6N_0$ の共通因数は 6 の約数である。よって

$$d_n \mid 6h, \quad h \mid 2$$

であり、

$$d_n \mid 12$$

を得る。

(2)

$d_n \mid 12$ であり、12 は 8 で割り切れない。よって d_n も 8 で割り切れない。

(3)

5 以上の素数 p は 12 を割らない。 $d_n \mid 12$ だから、 $p \nmid d_n$ である。

(4)

d_n は正の 12 の約数なので

$$d_n \leq 12.$$

実際、 $n = 8$ のとき

$$a_8 = 8 \cdot 9 = 72, \quad a_{11} = 11 \cdot 12 = 132$$

であり、

$$d_8 = \gcd(72, 132) = 12.$$

【総評】 難度 7、目安時間 20 分。最大公約数を直接求めるのではなく、取り得る素因数とその指数を上から抑える問題である。(2) では「連続 2 整数の積の 2 の指数は偶数側だけで決まる」ことを言語化すると、8 で同時に割れない理由が明確になる。(3) は剰余集合 $0, -1$ と $-3, -4$ の不一致が核心で、 $p = 3$ では重なり得るため、 $p \geq 5$ の条件が効いている。(4) では 9 での確認を忘れると 3^2 の可能性を消せず、上限 12 まで届かない。

【第 3 問】

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。 $0, \frac{1}{t}$ 以外のすべての実数 x で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

- (1) $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつことを示せ。
- (2) $f(x)$ の極大値を与える x の値を α , 極小値を与える x の値を β とし、座標平面上に 2 点 $P(\alpha, f(\alpha)), Q(\beta, f(\beta))$ をとる。 t が $0 < t < 1$ を満たしながら変化するとき、線分 PQ の中点 M の軌跡を求めよ。

▶ 解法 1 (根の和・積で中点を求める)

【方針】

まず定義域を意識して微分し、 $f'(x)$ の符号を決める二次式 $x^2 + 2tx - 1$ の 2 解を調べる。負の解は 0 より左、正の解は 0 と $1/t$ の間にあるので、それぞれ極大・極小になる。中点の軌跡では、2 つの極値点の x 座標の和と、対応する f の値の和を、根の和・積 $\alpha + \beta = -2t, \alpha\beta = -1$ で整理する。

【解答】

(1) $f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$ であり、定義域は $x \neq 0, \frac{1}{t}$ である。微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x(1-tx) - (x+t)(1-2tx)}{x^2(1-tx)^2} \\ &= \frac{t(x^2 + 2tx - 1)}{x^2(1-tx)^2} \end{aligned}$$

である。

分母は定義域で正であり、 $t > 0$ だから、符号は $x^2 + 2tx - 1$ で決まる。この二次式の解は $x = -t \pm \sqrt{t^2 + 1}$ である。ここで $\alpha = -t - \sqrt{t^2 + 1} < 0$, $\beta = -t + \sqrt{t^2 + 1} > 0$ とおく。さらに $\beta = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}} < 1 < \frac{1}{t}$ である。

したがって符号変化は、定義域の各区間で

$$(-\infty, \alpha) : +, \quad (\alpha, 0) : -, \quad (0, \beta) : -, \quad (\beta, \frac{1}{t}) : +, \quad (\frac{1}{t}, \infty) : +$$

となる。よって $x = \alpha$ で極大、 $x = \beta$ で極小をとる。したがって $f(x)$ は極大値と極小値を 1 つずつもつ。

(2) (1) より、極大値を与える x の値は $\alpha = -t - \sqrt{t^2 + 1}$ であり、極小値を与える x の値は $\beta = -t + \sqrt{t^2 + 1}$ である。したがって $\frac{\alpha + \beta}{2} = -t$ である。

次に $f(\alpha) + f(\beta)$ を求める。 α, β は方程式 $x^2 + 2tx - 1 = 0$ の 2 解なので $\alpha + \beta = -2t$, $\alpha\beta = -1$ である。これを用いると

$$\begin{aligned} f(\alpha) + f(\beta) &= \frac{\alpha + t}{\alpha(1 - t\alpha)} + \frac{\beta + t}{\beta(1 - t\beta)} \\ &= 4t^2 + 2 \end{aligned}$$

である。したがって、線分 PQ の中点 $M(X, Y)$ は $X = -t$, $Y = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = 2t^2 + 1$ を満たす。 $0 < t < 1$ より $-1 < X < 0$ であり、 $t = -X$ だから $Y = 2X^2 + 1$ である。よって求める軌跡は $Y = 2X^2 + 1$, $-1 < X < 0$ で表される放物線の一部である。

▶ 解法 2 (停留点での関数値を簡約する)

【方針】

微分して 2 つの停留点を求める。停留点が満たす二次方程式から t を消去すると $f(x) = 1/x^2$ と簡単になるため、極値の和を根の和・積だけで計算する。

【解答】

(1)

$$f'(x) = \frac{t(x^2 + 2tx - 1)}{x^2(1 - tx)^2}.$$

分母は定義域で正であり、分子の二次式の 2 解は

$$\alpha = -t - \sqrt{t^2 + 1} < 0, \quad \beta = -t + \sqrt{t^2 + 1}.$$

さらに

$$0 < \beta = \frac{1}{t + \sqrt{t^2 + 1}} < 1 < \frac{1}{t}.$$

したがって f' は α で正から負、 β で負から正へ変わるので、 $x = \alpha$ で極大、 $x = \beta$ で極小を取る。

(2)

停留点 x は

$$x^2 + 2tx - 1 = 0$$

を満たすから

$$t = \frac{1 - x^2}{2x}.$$

これを $f(x)$ に代入すると

$$x + t = \frac{x^2 + 1}{2x}, \quad 1 - tx = \frac{x^2 + 1}{2}$$

より

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

一方、 $\alpha + \beta = -2t$, $\alpha\beta = -1$ である。中点 $M(X, Y)$ について

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = -t$$

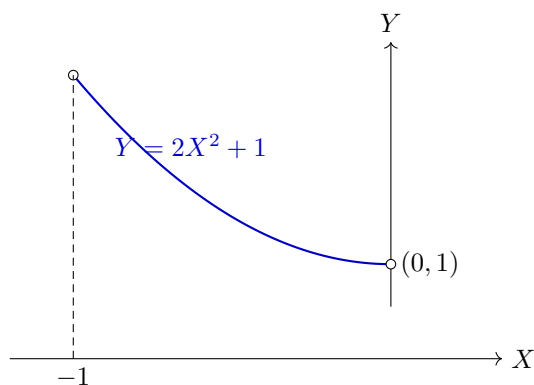
であり、

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2(\alpha\beta)^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} = 2t^2 + 1. \end{aligned}$$

よって

$$Y = 2X^2 + 1, \quad -1 < X < 0$$

である。



【総評】 難度 7、目安時間 24 分。微分計算そのものより、定義域の切れ目 $0, 1/t$ と臨界点の位置関係を正しく並べることが重要である。 $\beta < 1 < 1/t$ を確認しておく、正の臨界点が極小になる理由が明確になる。軌跡では、 α, β を個別に代入して複雑な式を追うより、根の和・積で中点の座標を処理する方が安定する。 $0 < t < 1$ から $-1 < X < 0$ という端点を含まない範囲になる点も採点対象である。

【第 4 問】

n を 3 以上の自然数とする。2 つの箱 X と Y があり、どちらの箱にも 1 から n までの n 枚の番号札が入っている。

A と B の 2 人のうち、A は箱 X から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を得点とする。B は箱 Y から札を 1 枚取り出し、もし取り出した札の番号が 3 から n までのいずれかであればその番号を得点とし、もし取り出した札の番号が 1 または 2 のいずれかであれば、その札を箱 Y に戻し、再び箱 Y から札を 1 枚取り出し、取り出した札の番号を B の得点とする。

(1) m を n 以下の自然数とする。B の得点が m になる確率を求めよ。

(2) A の得点より B の得点が大きくなる確率 p_n を求めよ。

▶ 解法 1 (B の得点分布で条件付けする)

【方針】

B の得点分布を先に求める。1 または 2 を最初に引いたときだけ再抽選が起こるため、 $m = 1, 2$ と $3 \leq m \leq n$ で確率が異なる。A は一様に 1 から n までを得点するので、B の得点が m のときに A がそれ未満である確率 $\frac{m-1}{n}$ を掛けて、 m で和を取る。

【解答】

(1) B が最初に 3 以上の札を引いた場合は、その番号がそのまま得点になる。一方、最初に 1 または 2 を引いた場合は、その札を戻してもう一度引き、2 回目の番号が得点になる。

まず $m = 1, 2$ の場合を考える。この得点になるには、最初に 1 または 2 を引き、その後の 2 回目で m を引く必要がある。したがって $P(B = m) = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}$ である。

次に $3 \leq m \leq n$ の場合を考える。このとき、最初に m を引く場合と、最初に 1 または 2 を引いてから 2 回目に m を引く場合がある。したがって $P(B = m) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+2}{n^2}$ である。よって

$$P(B = m) = \begin{cases} \frac{2}{n^2} & (m = 1, 2), \\ \frac{n+2}{n^2} & (3 \leq m \leq n) \end{cases}$$

である。

(2) A の得点は 1 から n まで等確率である。B の得点が m であるとき、A の得点より B の得点が高いのは、A の得点が $1, 2, \dots, m-1$ のいずれかである場合なので、その確率は $\frac{m-1}{n}$ である。

したがって $p_n = \sum_{m=1}^n P(B = m) \frac{m-1}{n}$ である。(1) を代入すると、 $m = 1$ の項は 0 なので

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{2}{n^2} + \sum_{m=3}^n \frac{n+2}{n^2} (m-1) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{2}{n^2} + \frac{n+2}{n^2} \sum_{m=3}^n (m-1) \right\} \end{aligned}$$

である。ここで $\sum_{m=3}^n (m-1) = 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} - 1$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{n^3} \left\{ 2 + (n+2) \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{n^2 + n - 4}{2n^2} \end{aligned}$$

となる。よって $p_n = \frac{n^2 + n - 4}{2n^2}$ である。

▶ 解法 2 (成功する組を直接数える)

【方針】

(1) で B の得点分布を確認する。(2) では「最初から 3 以上を引く場合」と「1 または 2 を引いて再抽選する場合」を分け、それぞれで B の得点より小さい A の得点の個数を直接足す。

【解答】

(1)

$m = 1, 2$ のときは、最初に 1 または 2 を引き、再抽選で m を引く必要があるので

$$P(B = m) = \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{2}{n^2}.$$

$3 \leq m \leq n$ のときは、最初に m を引く場合も加わるから

$$P(B = m) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+2}{n^2}.$$

(2)

最初の抽選で B が $m \geq 3$ を引き、かつ A の得点が m 未満となる寄与は

$$\frac{1}{n^2} \sum_{m=3}^n (m-1).$$

一方、B が最初に 1 または 2 を引いて再抽選へ進む確率は $2/n$ であり、その後の得点を m とすると寄与は

$$\frac{2}{n} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{m=1}^n (m-1).$$

したがって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{n(n-1)}{2} - 1 \right\} + \frac{2}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 + n - 4}{2n^2}. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6、目安時間 16 分。B のルールが得点 1, 2 と得点 3 以上で非対称になるため、最初に分布を作り切るのが安全である。 $m = 1$ の場合も「最初に 1 を引いたら得点 1」ではなく、戻して再抽選する点に注意する。(2) では B の得点で条件付けし、A が m 未満になる確率を掛けると整理しやすい。和の計算では $m = 2$ の項 $\frac{2}{n^2}$ と $m \geq 3$ の項を混ぜないことが採点上のポイントである。

【第 5 問】

$f(x)$ を区間 $[0, \pi]$ で連続な関数とする。関数 $f_1(x), f_2(x), \dots$ を関係式

$$f_1(x) = f(x),$$

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) dt \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定める。さらに、自然数 n に対して

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin t dt, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \cos t dt$$

とおく。

(1) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ。

(2) $c_n = a_n - 1$ とおく。このとき、 $c_{n+2} = -c_n$ が成立することを示し、一般項 c_n を a_1 と b_1 を用いて表せ。

(3) a_n, b_n が n によらない定数となるような $f(x)$ を 1 つ求めよ。

▶ 解法 1 (三角関数の直交性を使う)

【方針】

$\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$ を使い、 $f_{n+1}(x)$ が $\sin x$ と $\cos x$ の一次結合になることをまず示す。定義された a_n, b_n はそれぞれ $\sin$ 成分と $\cos$ 成分を拾う量なので、直交性

$$\int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0, \quad \int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

を用いて漸化式を出す。あとは $c_n = a_n - 1$ の 2 つ飛ばしの関係と、定数列になる条件を調べる。

【解答】

(1) 加法定理より $\sin(x-t) = \sin x \cos t - \cos x \sin t$ である。したがって

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \{\sin x \cos t - \cos x \sin t\} dt \\ &= 2 \cos x + b_n \sin x - a_n \cos x \\ &= b_n \sin x + (2 - a_n) \cos x \end{aligned}$$

である。

ここで

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin x \cos x dx = 0$$

である。よって

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{b_n \sin x + (2 - a_n) \cos x\} \sin x dx \\ &= b_n \end{aligned}$$

であり、同様に

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \{b_n \sin x + (2 - a_n) \cos x\} \cos x dx \\ &= 2 - a_n \end{aligned}$$

である。したがって $a_{n+1} = b_n$, $b_{n+1} = 2 - a_n$ である。

(2) $c_n = a_n - 1$ とおく。(1) より $a_{n+2} = b_{n+1} = 2 - a_n$ であるから $c_{n+2} = a_{n+2} - 1 = 1 - a_n = -(a_n - 1) = -c_n$ である。したがって $c_{n+2} = -c_n$ が成り立つ。

また $c_1 = a_1 - 1$, $c_2 = a_2 - 1 = b_1 - 1$ である。 $c_{n+2} = -c_n$ より、 $m = 0, 1, 2, \dots$ として

n	c_n
$4m+1$	$a_1 - 1$
$4m+2$	$b_1 - 1$
$4m+3$	$1 - a_1$
$4m+4$	$1 - b_1$

である。

(3) a_n, b_n が n によらない定数となるとする。その定数を a, b と書くと、(1) より $a = b$, $b = 2 - a$ である。したがって $a = b = 1$ であればよい。

例えば $f(x) = \sin x + \cos x$ とする。このとき

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin x + \cos x) \sin x \, dx = 1, \\ b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin x + \cos x) \cos x \, dx = 1 \end{aligned}$$

である。すると (1) の漸化式から $a_{n+1} = b_n = 1$, $b_{n+1} = 2 - a_n = 1$ が続くので、すべての n で $a_n = b_n = 1$ となる。よって条件を満たす関数の一例は $f(x) = \sin x + \cos x$ である。

▶ 解法 2 (複素数で 4 周期をまとめる)

【方針】

(1) で得た漸化式を $(a_n - 1, b_n - 1)$ の複素数表示に移す。1 段進む操作が $-i$ 倍になることから、周期 4 と定数列の条件をまとめて読む。

【解答】

(1) 加法定理で核を展開すると

$$f_{n+1}(x) = 2 \cos x + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f_n(t) \sin(x-t) \, dt = b_n \sin x + (2 - a_n) \cos x.$$

$\sin x, \cos x$ の直交性から

$$a_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = 2 - a_n.$$

(2) $z_n = (a_n - 1) + i(b_n - 1)$ とおくと

$$z_{n+1} = (b_n - 1) + i(1 - a_n) = -iz_n, \quad z_n = (-i)^{n-1} z_1.$$

よって、 $m = 0, 1, 2, \dots$ に対して

$$\begin{array}{c|cccc} n & 4m+1 & 4m+2 & 4m+3 & 4m+4 \\ \hline c_n = a_n - 1 & a_1 - 1 & b_1 - 1 & 1 - a_1 & 1 - b_1 \end{array}$$

であり、特に $c_{n+2} = -c_n$ である。

(3) 数列が一定なら $z_{n+1} = z_n$ である。一方 $z_{n+1} = -iz_n$ だから $z_n = 0$ 、すなわち $a_n = b_n = 1$ である。実際、

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

とすれば直交性から $a_1 = b_1 = 1$ となり、以後も一定である。

【総評】 難度 7、目安時間 22 分。複雑に見える積分も、 $\sin(x-t)$ を展開すれば情報が a_n, b_n の 2 つに圧縮される。答案では直交性から漸化式を導く計算を明記したい。(2) は周期 4 なので、 n を 4 で割った余りごとに一般項を書くと明快である。(3) は「1 つ求めよ」だから、 $a_1 = b_1 = 1$ を実現する具体例を示せば十分である。