

入 学 試 験 問 題

数 学



北 海 道 大 学 2020 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

三角形 ABC について

$$|\overrightarrow{AB}| = 1, \quad |\overrightarrow{AC}| = 2, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし、直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

- (1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ が成り立つような実数 s, t を求めよ。
- (3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

第 2 問

座標平面上の 2 点 $\left(\frac{1}{16}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{9}\right)$ を通る直線 l を考える。

- (1) l 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし、格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。
- (2) l 上の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を A とする。また、 l 上の A 以外の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を B とする。さらに、 A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする。三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

第 3 問

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。

- (1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。
- (2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。
- (3) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

第 4 問

α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし、 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義されるとき、次の問に答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくとき、すべての自然数 n に対して、 $b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

第 5 問

a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1 - f(t)\}f(t)} dt = ax$$

さらに、 $f(0) = \frac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

さらに、 $\lim_{a \rightarrow +0} S(a)$ を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)