

北海道大学 2020 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

三角形 ABC について

$$|\overrightarrow{AB}| = 1, \quad |\overrightarrow{AC}| = 2, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6}$$

が成立しているとする。三角形 ABC の外接円の中心を O とし、直線 AO と外接円との A 以外の交点を P とする。

- (1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ が成り立つような実数 s, t を求めよ。
- (3) 直線 AP と直線 BC の交点を D とするとき、線分 AD の長さを求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は余弦定理をベクトルの内積の形で使う。(2) では AP が外接円の直径であることから、 $\angle ABP$ と $\angle ACP$ が直角になる。これを $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 、 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ に直し、 $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ の係数を求める。(3) は D を AP 上の点として $\lambda\overrightarrow{AP}$ 、かつ BC 上の点として $(1-\mu)\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ と表し、係数比較で AD/AP の比を決める。

【解答】

(1) $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ とおく。条件より

$$|\vec{u}| = 1, \quad |\vec{v}| = 2, \quad |\overrightarrow{BC}| = |\vec{v} - \vec{u}| = \sqrt{6}$$

である。したがって $|\vec{v} - \vec{u}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ より $6 = 4 + 1 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$ である。よって $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$ である。

(2) 点 O は外接円の中心で、直線 AO と外接円とのもう 1 つの交点が P である。したがって AP は外接円の直径である。よって円周角の性質から $\angle ABP = 90^\circ$, $\angle ACP = 90^\circ$ である。 $\overrightarrow{AP} = s\vec{u} + t\vec{v}$ とおく。まず

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = (s-1)\vec{u} + t\vec{v}$$

であり、 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ だから $(s-1)|\vec{u}|^2 + t\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ すなわち $s-1-\frac{1}{2}t=0$ である。したがって $s-\frac{1}{2}t=1$ を得る。

同様に

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = s\vec{u} + (t-1)\vec{v}$$

であり、 $\vec{v} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ だから $s\vec{u} \cdot \vec{v} + (t-1)|\vec{v}|^2 = 0$ である。よって $-\frac{1}{2}s + 4t = 4$ を得る。

連立方程式 $s - \frac{1}{2}t = 1$, $-\frac{1}{2}s + 4t = 4$ を解くと $s = \frac{8}{5}$, $t = \frac{6}{5}$ である。

(3) 点 D は直線 AP 上にあるので、ある実数 λ を用いて

$$\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AP} = \lambda\left(\frac{8}{5}\vec{u} + \frac{6}{5}\vec{v}\right)$$

と書ける。

一方、点 D は直線 BC 上にあるので、ある実数 μ を用いて

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{BC} = \vec{u} + \mu(\vec{v} - \vec{u}) = (1-\mu)\vec{u} + \mu\vec{v}$$

と書ける。 $\vec{u}, \vec{v}$ は一次独立なので係数を比較して $\frac{8}{5}\lambda = 1-\mu$, $\frac{6}{5}\lambda = \mu$ である。2 式を加えると $\frac{14}{5}\lambda = 1$ となるから $\lambda = \frac{5}{14}$ である。

次に AP の長さを求める。 $\overrightarrow{AP} = \frac{8}{5}\vec{u} + \frac{6}{5}\vec{v}$ だから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}|^2 &= \left(\frac{8}{5}\right)^2 |\vec{u}|^2 + 2 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{6}{5} \vec{u} \cdot \vec{v} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 |\vec{v}|^2 \\ &= \frac{64}{25} + 2 \cdot \frac{48}{25} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{36}{25} \cdot 4 = \frac{32}{5} \end{aligned}$$

である。したがって $AD = \lambda AP = \frac{5}{14} \sqrt{\frac{32}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ である。

▶ 解法 2 (座標を置いて外心を求める)

【方針】

A を原点、AB を x 軸上に置く。(1) の内積から C の座標を決め、垂直二等分線の交点として外心 O を求める。P は A の対蹠点なので $P=2O$ であり、あとは座標比較と 2 直線の交点計算で s, t と AD を得る。

【解答】

(1) $A = (0, 0), B = (1, 0)$ と置く。 $C = (u, v)$ とすると

$$u^2 + v^2 = 4, \quad (u-1)^2 + v^2 = 6$$

である。差を取ると $u = -1/2$ であり、上半平面に C を取れば

$$C = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$$

となる。したがって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (1, 0) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

である。

(2) 辺 AB の垂直二等分線から、外心を $O = (1/2, w)$ と置ける。 $OA = OC$ より

$$\frac{1}{4} + w^2 = (-1)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2} - w\right)^2$$

であり、これを解くと $w = 3\sqrt{15}/10$ である。点 P は A の対蹠点なので

$$P = 2O = \left(1, \frac{3\sqrt{15}}{5}\right)$$

である。

$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ の成分を比較すると

$$s - \frac{t}{2} = 1, \quad \frac{\sqrt{15}}{2}t = \frac{3\sqrt{15}}{5}$$

だから

$$s = \frac{8}{5}, \quad t = \frac{6}{5}$$

を得る。

(3) 直線 AP 上の点を λP 、直線 BC 上の点を $(1-\mu)B + \mu C$ と表す。交点 D では

$$\lambda \left(1, \frac{3\sqrt{15}}{5}\right) = \left(1 - \frac{3\mu}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\mu\right)$$

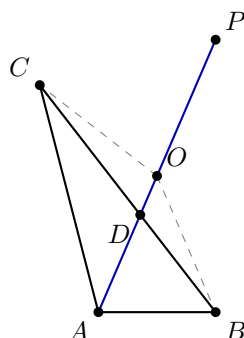
である。第 2 成分から $\mu = 6\lambda/5$ 、第 1 成分へ代入して $\lambda = 5/14$ を得る。さらに

$$AP^2 = 1 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{5}\right)^2 = \frac{32}{5}$$

だから

$$AD = \frac{5}{14}AP = \frac{5}{14}\sqrt{\frac{32}{5}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

である。



【総評】 外接円の直径から直角条件を作り、ベクトルの係数比較で解く問題。目安時間は 16 分。(2) では AP が直径であることを見落とすと計算の出発点が作りにくい。直角条件を B と C の 2 か所で立てると、 s, t は連立一次方程式で決まる。(3) は D を AP 上と BC 上の 2 通りに表し、係数比較で $AD:AP$ を出すのが最短である。最後の AP の長さは内積 $-1/2$ を必ず含めて計算する。

【第 2 問】

座標平面上の 2 点 $\left(\frac{1}{16}, 0\right), \left(0, \frac{1}{9}\right)$ を通る直線 l を考える。

- (1) l 上にある格子点の座標をすべて求めよ。ただし、格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数であるような点のことである。
- (2) l 上の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を A とする。また、 l 上の A 以外の格子点のうち、原点との距離が最小となる点を B とする。さらに、 A の x 座標と B の y 座標をそれぞれ x 座標と y 座標とする点を C とする。三角形 ABC の内部および周上にある格子点の個数を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は直線を $16x + 9y = 1$ と直し、一次不定方程式の整数解を求める。(2) では一般解を距離の 2 乗に代入し、整数 m で最小・次小となる点 A, B を決める。三角形 ABC は斜辺 AB が元の直線、 BC が水平、 AC が垂直な直角三角形になるので、格子点は x 座標ごとに下端の整数を切り上げて数える。別解として、 A, B, C が格子点であることから Pick の定理で内部点と境界点を分けて総数を求めることもできる。

【解答】

(1) 2 点 $\left(\frac{1}{16}, 0\right), \left(0, \frac{1}{9}\right)$ を通る直線は、切片の形で $\frac{x}{1/16} + \frac{y}{1/9} = 1$ と表せる。したがって $16x + 9y = 1$ である。

格子点を求めるには、この一次不定方程式の整数解を求めればよい。9 を法として見ると $16x \equiv 1 \pmod{9}$ であり、 $16 \equiv 7 \pmod{9}$ だから $7x \equiv 1 \pmod{9}$ である。 $7 \cdot 4 = 28 \equiv 1 \pmod{9}$ より $x \equiv 4 \pmod{9}$ である。よって $x = 4 + 9m$ (m は整数) と書ける。これを $16x + 9y = 1$ に代入すると $y = \frac{1 - 16(4 + 9m)}{9} = -7 - 16m$ である。したがって求める格子点は $(x, y) = (4 + 9m, -7 - 16m)$ (m は整数) である。

(2) (1) の格子点と原点との距離の 2 乗は $(4 + 9m)^2 + (-7 - 16m)^2$ である。展開すると $(4 + 9m)^2 + (-7 - 16m)^2 = 337m^2 + 296m + 65$ である。この二次式の軸は $m = -\frac{296}{2 \cdot 337} = -\frac{148}{337}$ であり、 $-1 < m < 0$ にある。したがって整数 m で最小となる候補は $m = 0$ と $m = -1$ である。

実際に値を比べると $m = 0 \Rightarrow 65, m = -1 \Rightarrow 106$ であるから、最小となる点は $A = (4, -7)$ である。また次に小さいのは $m = -1$ の点で、 $B = (-5, 9)$ である。したがって問題文の定義より $C = (4, 9)$ である。

三角形 ABC は、 BC が水平、 AC が垂直である。斜辺 AB はもとの直線 $16x + 9y = 1$ 上にあるので、三角形内および周上の点は $-5 \leq x \leq 4, \frac{1 - 16x}{9} \leq y \leq 9$ をみtas。

整数 x を $-5, -4, \dots, 4$ と動かして数える。各 x に対して、整数 y の個数は $9 - \left\lceil \frac{1 - 16x}{9} \right\rceil + 1$ である。順に書くと $1, 2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17$ である。したがって求める格子点の個数は $1 + 2 + 4 + 6 + 8 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 = 86$ である。

別解。最後の数え上げは Pick の定理でも確認できる。三角形 ABC は底辺 $BC = 9$ 、高さ $AC = 16$ の直角三角形なので面積は $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 16 = 72$ である。境界上の格子点数は、 AB では $\gcd(9, 16) + 1 = 2$ 個、 BC では 10 個、 CA では 17 個であり、頂点の重複を引くと $2 + 10 + 17 - 3 = 26$ 個である。Pick の定理より内部の格子点数は $72 - \frac{26}{2} + 1 = 60$ であるから、内部および周上の格子点数は $60 + 26 = 86$ である。

▶ 解法 2 (一次不定方程式と Pick の定理)

【方針】

拡張された互除法の等式 $1 = 16 \cdot 4 - 9 \cdot 7$ から格子点の一般形を直ちに作る。原点からの距離は隣り合う候補を比較して A, B を決める。三角形の面積と各辺上の格子点数を求め、Pick の定理から内部点と境界点の総数を出す。

【解答】

(1) 直線の方程式は

$$16x + 9y = 1$$

である。 $1 = 16 \cdot 4 - 9 \cdot 7$ だから $(4, -7)$ は 1 つの整数解である。任意の整数 m に対して

$$(x, y) = (4 + 9m, -7 - 16m)$$

も解となる。逆に、2 つの整数解の差は $16\Delta x + 9\Delta y = 0$ を満たし、 $16, 9$ は互いに素なので $\Delta x = 9m, \Delta y = -16m$ と書ける。したがってこれがすべての格子点である。

(2) 原点からの距離の 2 乗は

$$(4 + 9m)^2 + (-7 - 16m)^2 = 337m^2 + 296m + 65$$

である。軸は $-148/337$ なので、最小候補は $m = 0, -1$ である。値はそれぞれ $65, 106$ であり、さらに外側の整数では増加する。よって

$$A = (4, -7), \quad B = (-5, 9), \quad C = (4, 9)$$

である。

三角形 ABC は直角三角形で、その面積は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 16 = 72$$

である。線分 AB の座標差は $(9, -16)$ で互いに素だから、 AB 上の格子点は両端の 2 個だけである。 BC 上は 10 個、 CA 上は 17 個なので、境界上の格子点数 B_0 は

$$B_0 = 2 + 10 + 17 - 3 = 26$$

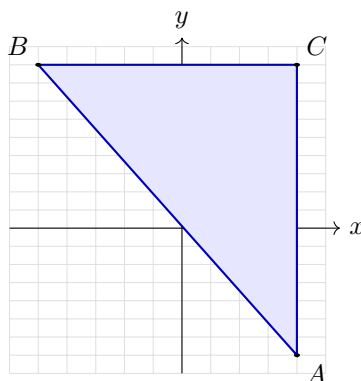
である。内部の格子点数を I とすると、Pick の定理より

$$72 = I + \frac{26}{2} - 1$$

だから $I = 60$ である。したがって内部および周上の格子点は

$$I + B_0 = 60 + 26 = 86$$

個である。



【総評】 一次不定方程式と格子点数え上げを組み合わせる問題。目安時間は 18 分。(1) は $16x + 9y = 1$ に直して合同式で一般解を出す。(2) は距離の 2 乗を m の二次式として扱い、最小点 A と次小点 B を確定するところまでが前半の山である。三角形内の格子点は x 座標ごとの直接数え上げが高校範囲では安全だが、格子点三角形なので Pick の定理による検算も有効である。

【第 3 問】

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを続けて n 回投げる試行を行い、出た目を順に $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。

- (1) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 3 となる確率を n の式で表せ。
- (2) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最大公約数が 1 となる確率を n の式で表せ。
- (3) $X_1, X_2, \dots, X_n$ の最小公倍数が 20 となる確率を n の式で表せ。

▶ 解法 1

【方針】

(1)(2) は文系第 3 問と同じく、最大公約数を共通素因数の条件として数える。(3) では最小公倍数が 20 になるためには、すべての出目が 20 の約数である必要がある。さいころで使える約数は 1, 2, 4, 5 であり、 $20 = 4 \cdot 5$ なので、4 が少なくとも 1 回、5 が少なくとも 1 回出る条件を包除で数える。

【解答】

(1) 最大公約数が 3 となるには、すべての出目が 3 の倍数である必要がある。さいころの目で 3 の倍数は 3, 6 である。ただし、すべての出目が 6 なら最大公約数は 6 になるので除く必要がある。

したがって条件をみたす出方は $2^n - 1$ 通りである。全体は 6^n 通りだから、求める確率は $\frac{2^n - 1}{6^n}$ である。

(2) 最大公約数が 1 でない場合を余事象として数える。共通の素因数は 2, 3, 5 のいずれかである。

すべての出目が 2 の倍数である出方は、各回が 2, 4, 6 の 3 通りなので 3^n 通りである。すべての出目が 3 の倍数である出方は、各回が 3, 6 の 2 通りなので 2^n 通りである。すべての出目が 5 の倍数である出方は、すべて 5 の 1 通りである。

2 の倍数と 3 の倍数の重なりは、すべて 6 である 1 通りである。5 は 2 や 3 の倍数と重ならないので、最大公約数が 1 でない出方は $3^n + 2^n + 1 - 1 = 3^n + 2^n$ 通りである。よって最大公約数が 1 となる確率は $\frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}$ である。

(3) 最小公倍数が 20 となるには、まずすべての出目が 20 の約数でなければならない。さいころの目の中で 20 の約数であるものは 1, 2, 4, 5 である。

さらに、最小公倍数が 20 になるには、素因数分解 $20 = 2^2 \cdot 5$ の 2^2 と 5 が両方現れる必要がある。上の 4 種類の出目の中で 2^2 を含むのは 4 だけであり、5 を含むのは 5 だけである。したがって、4 が少なくとも 1 回、5 が少なくとも 1 回出ることが必要十分である。

出目を 1, 2, 4, 5 に限ると全体は 4^n 通りである。このうち 4 が出ないものは 3^n 通り、5 が出ないものも 3^n 通りである。4 も 5 も出ないものは 1, 2 だけなので 2^n 通りである。包除により条件をみたす出方は $4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$ 通りである。

したがって求める確率は $\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$ である。

▶ 解法 2 (最大公約数の分割と最初の特別な目)

【方針】

(1)(2) は最大公約数 2~6 の出方を互いに重ならない組へ分ける。(3) は 4 と 5 のうち最初に現れる方の位置を固定する。その位置より前は 1, 2 だけで、後ろには反対側の目が少なくとも 1 回必要になるため、位置ごとの和として数えられる。

【解答】

(1) 最大公約数が 3 である出方は、各回が 3, 6 のいずれかで、すべて 6 ではない出方である。したがって確率は

$$\frac{2^n - 1}{6^n}$$

である。

(2) 最大公約数が 2 である出方は、各回が 2, 4, 6 のいずれかで、すべて 4 とすべて 6 を除いた $3^n - 2$ 通りである。最大公約数が 3, 4, 5, 6 である出方は、それぞれ

$$2^n - 1, \quad 1, \quad 1, \quad 1$$

通りである。これらは互いに重ならないから、最大公約数が 1 でない出方は合計 $3^n + 2^n$ 通りである。よって求める確率は

$$\frac{6^n - 3^n - 2^n}{6^n}$$

となる。

(3) 最小公倍数が 20 であるための必要十分条件は、すべての目が 1, 2, 4, 5 のいずれかで、4 と 5 が少なくとも 1 回ずつ現れることである。

4 と 5 のうち、最初に現れる位置を j とする ($1 \leq j \leq n-1$)。それより前の $j-1$ 回は 1, 2 の 2 通り、 j 回目は 4 か 5 の 2 通りである。残る $n-j$ 回は 1, 2, 4, 5 の 4 通りから選ぶが、 j 回目と反対の目を少なくとも 1 回含まなければならないので、その数は

$$4^{n-j} - 3^{n-j}$$

である。したがって条件をみたす出方は

$$2 \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-1} (4^{n-j} - 3^{n-j})$$

通りである。等比数列の和を用いると

$$\sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-1} 4^{n-j} = 2 \cdot 4^{n-1} - 2^n, \quad \sum_{j=1}^{n-1} 2^{j-1} 3^{n-j} = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}$$

だから、出方の総数は

$$4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n$$

となる。よって確率は

$$\frac{4^n - 2 \cdot 3^n + 2^n}{6^n}$$

である。

【総評】 最大公約数と最小公倍数を素因数条件で読む確率問題。目安時間は 14 分。(1)(2) は文系と同じ包除で、重なりが「すべて 6」の 1 通りだけになる点を確認する。(3) は最小公倍数 20 という条件を、出目を 1, 2, 4, 5 に制限したうえで 4 と 5 の出現を要求する形に言い換えるのが核心である。少なくとも 1 回の条件は包除で処理すると式が明確になる。

【第 4 問】

α を $0 < \alpha < 1$ を満たす実数とし、 $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = f(a_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定義されるとき、次の問に答えよ。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $0 < a_n < 1$ かつ $a_{n+1} > a_n$ が成り立つことを示せ。
- (2) $b_n = \frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ とおくと、すべての自然数 n に対して、 $b_{n+1} < b_n$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ および (2) で定めた $\{b_n\}$ に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

(1) は $h(x) = \sin \frac{\pi x}{2} - x$ を考え、端点で 0、内側で上に凸ではなく上側にふくらむ形になることから正を示す。これにより $0 < a_n < 1$ と単調増加を帰納的に得る。(2) では b_n を $\phi(a_n)$ と見て、 $\phi(x) = \frac{1 - \sin(\pi x/2)}{1 - x}$ の単調性を調べる。 $y = 1 - x$ に置き換えると $\frac{1 - \cos(\pi y/2)}{y}$ となり、その y に関する増加性から ϕ は x に関して減少する。(3) は単調有界性で a_n の極限を出し、 b_n は $y = 1 - a_n \rightarrow 0$ で挟み込みにより 0 へ収束させる。

【解答】

(1) $h(x) = \sin \frac{\pi x}{2} - x$ とおく。 $0 < x < 1$ において $h''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2} < 0$ である。また $h(0) = 0$, $h(1) = 0$ である。したがって、 $h(x)$ のグラフは区間 $[0, 1]$ で上に凸ではなく下にふくらみ、両端で 0 をとるので $h(x) > 0$ ($0 < x < 1$) である。すなわち $\sin \frac{\pi x}{2} > x$ ($0 < x < 1$) が成り立つ。 $0 < a_n < 1$ と仮定すると、 $0 < \frac{\pi a_n}{2} < \frac{\pi}{2}$ だから $0 < a_{n+1} = \sin \frac{\pi a_n}{2} < 1$ であり、さらに上の不等式から $a_{n+1} = \sin \frac{\pi a_n}{2} > a_n$ である。 $a_1 = \alpha$ は $0 < \alpha < 1$ をみたすので、数学的帰納法により、すべての自然数 n について $0 < a_n < 1$, $a_{n+1} > a_n$ が成り立つ。

(2) $\phi(x) = \frac{1 - \sin(\pi x/2)}{1 - x}$ ($0 < x < 1$) とおくと $b_n = \phi(a_n)$ である。ここで $y = 1 - x$ とおくと

$$\sin \frac{\pi x}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2} \right) = \cos \frac{\pi y}{2}$$

であるから $\phi(x) = \frac{1 - \cos(\pi y/2)}{y}$ である。 $\psi(y) = \frac{1 - \cos(\pi y/2)}{y}$ ($0 < y < 1$) とおく。 $u = \frac{\pi y}{2}$ とすると、 $0 < u < \frac{\pi}{2}$ であり、 $\psi'(y)$ の符号は $u \sin u - (1 - \cos u)$ の符号と同じである。そこで $G(u) = u \sin u + \cos u - 1$ とおくと $G'(u) = u \cos u > 0$ ($0 < u < \frac{\pi}{2}$) であり、 $G(0) = 0$ であるから $G(u) > 0$ である。したがって $\psi'(y) > 0$ であり、 $\psi(y)$ は y について増加する。

一方 $y = 1 - x$ なので、 x が増加すると y は減少する。よって $\phi(x)$ は x について減少する。(1) より $a_{n+1} > a_n$ であるから $b_{n+1} = \phi(a_{n+1}) < \phi(a_n) = b_n$ である。

(3) (1) より $\{a_n\}$ は単調増加であり、しかも $a_n < 1$ で上に有界である。したがって極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ が存在し、 $0 < L \leq 1$ である。漸化式の両辺の極限を取ると $L = \sin \frac{\pi L}{2}$ である。

もし $0 < L < 1$ なら、(1) で示した不等式から $\sin \frac{\pi L}{2} > L$ となり矛盾する。したがって $L = 1$ である。

次に $b_n = \frac{1 - \sin(\pi a_n/2)}{1 - a_n}$ である。 $y_n = 1 - a_n$ とおくと、 $a_n \rightarrow 1$ より $y_n \rightarrow 0+$ であり、 $b_n = \frac{1 - \cos(\pi y_n/2)}{y_n}$ である。

$0 < z < \frac{\pi}{2}$ では $0 \leq 1 - \cos z \leq \frac{z^2}{2}$ が成り立つので、 $z = \frac{\pi y_n}{2}$ として

$$0 \leq b_n \leq \frac{1}{y_n} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\pi y_n}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{8} y_n$$

である。右辺は 0 に近づくから、はさみうちにより $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ である。以上より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ である。

▶ 解法 2 (凹関数の弦と割線の傾き)

【方針】

$f(x) = \sin(\pi x/2)$ が区間 $[0, 1]$ で狭義凹関数であることを利用する。グラフは両端を結ぶ弦 $y = x$ より上にあるため反復列は増加する。また b_n は点 $(a_n, f(a_n))$ と固定点 $(1, 1)$ を結ぶ割線の傾きであり、凹関数では左端を右へ動かすとこの傾きが減少する。

【解答】

(1)

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2} < 0 \quad (0 < x < 1)$$

だから、 f は $[0, 1]$ で狭義凹関数である。また $f(0) = 0, f(1) = 1$ なので、そのグラフは両端を結ぶ弦 $y = x$ より上にある。したがって

$$0 < x < 1 \implies x < f(x) < 1$$

である。 $0 < a_1 < 1$ からこの関係を繰り返し用いれば、すべての n について

$$0 < a_n < 1, \quad a_n < a_{n+1}$$

を得る。

(2) $f(1) = 1$ より

$$b_n = \frac{f(1) - f(a_n)}{1 - a_n}$$

である。これはグラフ上の 2 点 $(a_n, f(a_n)), (1, 1)$ を結ぶ割線の傾きである。

狭義凹関数では $0 < x < y < 1$ に対して

$$\frac{f(1) - f(y)}{1 - y} < \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$$

が成り立つ。実際、 $y = (1 - \lambda)x + \lambda \cdot 1$ と書けば、狭義凹性から $f(y) > (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(1)$ となり、整理して上式を得る。(1) より $a_n < a_{n+1}$ だから

$$b_{n+1} < b_n$$

である。

(3) a_n は増加し、1 を上界にもつので極限 L が存在する。漸化式から $L = f(L)$ であるが、 $0 < L < 1$ では $f(L) > L$ だから、 $L = 1$ でなければならない。よって

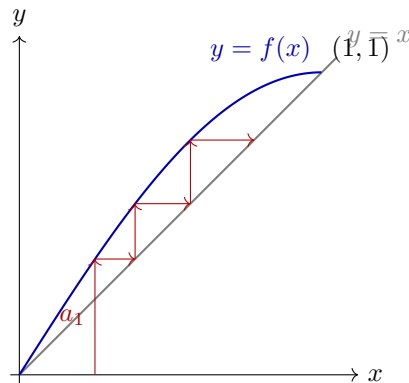
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

である。

さらに b_n は $x = a_n$ における f の左割線の傾きであり、 $a_n \rightarrow 1-$ だから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(1) - f(x)}{1 - x} = f'(1) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

となる。



【総評】 三角関数で定義された反復数列の単調性と差商の単調性を調べる問題。目安時間は 24 分。(1) は $\sin(\pi x/2) > x$ を端点と 2 階微分で示すのが安定する。(2) は b_n を関数 $\phi(a_n)$ として見直し、 $y = 1 - x$ で余弦の式へ変換するのが核心である。最後の極限では、 $a_n \rightarrow 1$ を固定点方程式だけでなく (1) の不等式で絞り、 b_n は $1 - \cos z \leq z^2/2$ で 0 へ挟むと厳密になる。

【第 5 問】

a を正の定数とする。微分可能な関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して次の条件を満たしているとする。

$$0 < f(x) < 1, \quad \int_0^x \frac{f'(t)}{\{1 - f(t)\}f(t)} dt = ax$$

さらに、 $f(0) = \frac{1}{3}$ であるとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x = 0, x = 1$ で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。さらに、 $\lim_{a \rightarrow +0} S(a)$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

被積分関数は $\log \frac{f(t)}{1 - f(t)}$ の導関数なので、積分方程式を対数の差に直す。初期値 $f(0) = 1/3$ から定数を決め、 $\frac{f(x)}{1 - f(x)} = \frac{1}{2} e^{ax}$ を解いて $f(x)$ を得る。(2) は

$$S(a) = \int_0^1 f(x) dx$$

を指数置換で計算し、 $a \rightarrow +0$ の極限は $\log(e^a + 2)$ の $a = 0$ における微分係数として評価する。

【解答】

(1) $0 < f(x) < 1$ なので、 $\log \frac{f(x)}{1 - f(x)}$ を考えることができる。微分すると

$$\frac{d}{dx} \log \frac{f(x)}{1 - f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(x)}{1 - f(x)} = \frac{f'(x)}{\{1 - f(x)\}f(x)}$$

である。

したがって与えられた等式は $\log \frac{f(x)}{1-f(x)} - \log \frac{f(0)}{1-f(0)} = ax$ と同値である。ここで $f(0) = \frac{1}{3}$ より $\frac{f(0)}{1-f(0)} = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$ である。よって $\log \frac{f(x)}{1-f(x)} - \log \frac{1}{2} = ax$ であり、指数を取って $\frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{1}{2}e^{ax}$ を得る。

これを $f(x)$ について解くと $2f(x) = e^{ax}\{1-f(x)\}$ だから $(e^{ax}+2)f(x) = e^{ax}$ である。したがって $f(x) = \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}$ である。

(2) 求める面積は

$$S(a) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2} dx$$

である。ここで $\frac{d}{dx} \log(e^{ax}+2) = \frac{ae^{ax}}{e^{ax}+2}$ だから

$$\int \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2} dx = \frac{1}{a} \log(e^{ax}+2)$$

である。よって

$$S(a) = \frac{1}{a} [\log(e^{ax}+2)]_0^1 = \frac{1}{a} \log \frac{e^a+2}{3}$$

である。

次に極限を求める。 $S(a) = \frac{\log(e^a+2) - \log 3}{a}$ であるから、これは関数 $G(a) = \log(e^a+2)$ の $a=0$ における微分係数である。実際 $G'(a) = \frac{e^a}{e^a+2}$ なので $\lim_{a \rightarrow +0} S(a) = G'(0) = \frac{1}{3}$ である。

▶ 解法 2 (微分方程式と変数変換)

【方針】

与えられた積分等式を微分し、ロジスティック型の微分方程式 $f' = af(1-f)$ を得る。変数分離と初期値で f を決め、面積は $u = f(x)$ の置換、最後の極限は区間上の上下評価で処理する。

【解答】

(1) 与式の両辺を x で微分すると

$$\frac{f'(x)}{\{1-f(x)\}f(x)} = a, \quad f'(x) = af(x)\{1-f(x)\}$$

である。 $0 < f < 1$ なので変数を分離でき、

$$\frac{f'}{f(1-f)} = a, \quad \log \frac{f(x)}{1-f(x)} = ax + C$$

となる。 $f(0) = 1/3$ から $C = \log(1/2)$ であるため

$$\frac{f(x)}{1-f(x)} = \frac{1}{2}e^{ax}, \quad f(x) = \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2}$$

を得る。

(2) $u = f(x)$ と置くと $du = au(1-u) dx$ だから

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{a} \int_{1/3}^{f(1)} \frac{du}{1-u} = \frac{1}{a} \log \frac{2/3}{1-f(1)} \\ &= \frac{1}{a} \log \frac{e^a+2}{3} \end{aligned}$$

である。

また $a > 0, 0 \leq x \leq 1$ では

$$\frac{1}{3} \leq \frac{e^{ax}}{e^{ax}+2} \leq \frac{e^a}{e^a+2}$$

なので、区間 $[0, 1]$ で積分すると

$$\frac{1}{3} \leq S(a) \leq \frac{e^a}{e^a+2}$$

となる。両端は $a \rightarrow +0$ で $1/3$ に近づくから

$$\lim_{a \rightarrow +0} S(a) = \frac{1}{3}$$

である。

【総評】 積分方程式を対数の形に直して関数を決定する問題。目安時間は 14 分。 $0 < f < 1$ により対数と変数分離が正当化される。(2) は原始関数または $u = f(x)$ で面積を求め、極限は微分係数か区間上のはさみうちで処理できる。