

北海道大学 2021 年度 理系 (後期)

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2$ とし、曲線 $C: y = f(x)$ を考える。

- (1) C の変曲点をすべて求めよ。
- (2) C の変曲点のうち x 座標の値が最大のものを P とする。 P における C の接線 l の方程式を求めよ。
- (3) C と (2) の接線 l で囲まれた部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (曲線と接線の差を因数分解する方法)

【方針】

変曲点は $f''(x) = 0$ かつ符号が変わる点として求める。最大の x 座標をもつ変曲点 P が決まったら、 $f'(1)$ から接線を出す。面積では、曲線と接線の交点を調べるために $f(x) - l(x)$ を因数分解する。接点 $x = 1$ は重なって現れるので、もう一つの交点 $x = -9$ を見つけ、区間内の上下関係を確認して積分する。

【解答】

(1) $f(x) = x^4 + 6x^3 - 24x^2$ より $f'(x) = 4x^3 + 18x^2 - 48x$ であり、 $f''(x) = 12x^2 + 36x - 48 = 12(x+4)(x-1)$ である。 $x = -4, 1$ の前後で $f''(x)$ の符号は変わるので、どちらも変曲点を与える。

それぞれの y 座標は $f(-4) = (-4)^4 + 6(-4)^3 - 24(-4)^2 = -512$ および $f(1) = 1 + 6 - 24 = -17$ である。したがって変曲点は $(-4, -512)$, $(1, -17)$ である。

(2)

(1) の変曲点のうち x 座標が最大のものは $P = (1, -17)$ である。接線の傾きは $f'(1) = 4 + 18 - 48 = -26$ であるから、接線 l は $y + 17 = -26(x - 1)$ すなわち $y = -26x + 9$ である。

(3)

接線を $l(x) = -26x + 9$ とおく。曲線と接線の差は

$$\begin{aligned} f(x) - l(x) &= x^4 + 6x^3 - 24x^2 + 26x - 9 \\ &= (x-1)^3(x+9) \end{aligned}$$

である。したがって交点の x 座標は $x = -9, 1$ である。 $-9 < x < 1$ では $(x-1)^3 < 0$, $x+9 > 0$ だから $f(x) - l(x) < 0$ であり、接線が曲線より上にある。

よって求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-9}^1 \{l(x) - f(x)\} dx \\ &= - \int_{-9}^1 (x-1)^3(x+9) dx \end{aligned}$$

である。 $u = x - 1$ とおくと、 $x = -9$ で $u = -10$, $x = 1$ で $u = 0$, また $x + 9 = u + 10$ であるから

$$\begin{aligned} S &= - \int_{-10}^0 u^3(u+10) du \\ &= - \int_{-10}^0 (u^4 + 10u^3) du \\ &= \left[-\frac{u^5}{5} - \frac{5}{2}u^4 \right]_{-10}^0 \\ &= 5000. \end{aligned}$$

したがって面積は 5000 である。

▶ 解法 2 (交点区間を 0 から 1 に縮尺する方法)

【方針】

変曲点と接線を求め、差を $(x-1)^3(x+9)$ と因数分解する。面積積分では $t = (x+9)/10$ と置いて区間 $[-9, 1]$ を $[0, 1]$ に移し、端点で消える因子を簡単な多項式として積分する。

【解答】

(1)

$$f''(x) = 12(x+4)(x-1)$$

は $x = -4, 1$ のそれぞれで符号を変える。したがって変曲点は

$$(-4, -512), (1, -17)$$

である。

(2) $P = (1, -17)$ であり、 $f'(1) = -26$ だから

$$l: y = -26x + 9$$

である。

(3) 曲線と接線の差は

$$f(x) - l(x) = (x-1)^3(x+9).$$

したがって交点は $x = -9, 1$ にあり、その間では接線が上である。面積 S は

$$S = \int_{-9}^1 (1-x)^3(x+9) dx.$$

ここで

$$t = \frac{x+9}{10}$$

とおくと、 $x = -9, 1$ はそれぞれ $t = 0, 1$ に対応し、

$$x+9 = 10t, \quad 1-x = 10(1-t), \quad dx = 10 dt$$

である。よって

$$\begin{aligned} S &= 10^5 \int_0^1 t(1-t)^3 dt \\ &= 10^5 \int_0^1 (t - 3t^2 + 3t^3 - t^4) dt \\ &= 10^5 \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \\ &= 5000. \end{aligned}$$

【総評】 難度 6、計算量 6。想定時間は 12 分程度。変曲点では二階導関数が 0 になるだけでなく符号変化も確認する。曲線と接線の差を因数分解すると、接点 $x=1$ のほかに $x=-9$ が現れ、上下関係も判定できる。面積は $x-1$ で平行移動する方法と、交点区間を 0 から 1 へ縮尺する方法の 2 通りで 5000 を確認した。大きな数値だが区間幅 10 と四次式の尺度から不自然ではない。

【第 2 問】

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし、平面上の点 P と点 Q を

$$P \left(\frac{1}{2} \{1 - \cos \theta - \sqrt{3}(\tan \theta - \sin \theta)\}, \frac{1}{2} \{\sqrt{3}(1 - \cos \theta) + \tan \theta - \sin \theta\} \right)$$

$$Q \left(\frac{1}{2} \{1 + \cos \theta - \sqrt{3}(\tan \theta + \sin \theta)\}, \frac{1}{2} \{\sqrt{3}(1 + \cos \theta) + \tan \theta + \sin \theta\} \right)$$

で定める。 M を線分 PQ の中点とし、 O を原点 $(0, 0)$ とする。

- (1) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{OM}$ を求めよ。
- (2) 3 点 O, P, Q は同一直線上にあることを示せ。
- (3) $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{PM}|$ となるような θ の値を求めよ。

▶ 解法 1 (共通方向ベクトルで位置関係を読む方法)

【方針】

複雑な座標に見えるが、 $Q - P$ と中点 M を計算すると、どちらも $(1 - \sqrt{3}\tan \theta, \sqrt{3} + \tan \theta)$ の向きに整理できる。 $\overrightarrow{OM}$ が $\overrightarrow{PQ}$ と平行であることから、直線 PQ が原点を通ると分かる。最後は同一直線上で M が PQ の中点であることを使い、 $|\overrightarrow{OP}|$ と $|\overrightarrow{PM}|$ を $|\overrightarrow{PQ}|$ の倍数で表して $\cos \theta$ を決める。

【解答】

(1)

座標を差し引くと

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (\cos \theta - \sqrt{3}\sin \theta, \sqrt{3}\cos \theta + \sin \theta) \\ &= \cos \theta (1 - \sqrt{3}\tan \theta, \sqrt{3} + \tan \theta) \end{aligned}$$

である。

また M は P, Q の中点であるから、座標を足して 2 で割ると

$$\overrightarrow{OM} = \left(\frac{1 - \sqrt{3}\tan \theta}{2}, \frac{\sqrt{3} + \tan \theta}{2} \right)$$

である。

(2)

(1) より

$$\overrightarrow{PQ} = \cos \theta (1 - \sqrt{3}\tan \theta, \sqrt{3} + \tan \theta)$$

であり、

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} (1 - \sqrt{3}\tan \theta, \sqrt{3} + \tan \theta)$$

である。したがって $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2\cos \theta} \overrightarrow{PQ}$ である。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\cos \theta > 0$ なので、これは $\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が平行であることを示している。

点 M は直線 PQ 上にあり、 $\overrightarrow{OM}$ は直線 PQ と平行である。よって原点 O も直線 PQ 上にある。したがって 3 点 O, P, Q は同一直線上にある。

(3) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2\cos \theta} \overrightarrow{PQ}$ であり、 M は PQ の中点である。 $\overrightarrow{PQ}$ と同じ向きの単位を使って直線上の位置を表すと、

$$M = \frac{1}{2\cos \theta} \overrightarrow{PQ}, \quad P = M - \frac{1}{2} \overrightarrow{PQ}$$

である。したがって

$$|\overrightarrow{OP}| = \left(\frac{1}{2\cos \theta} - \frac{1}{2} \right) |\overrightarrow{PQ}|$$

である。また $|\overrightarrow{PM}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ}|$ である。

条件 $|\vec{OP}| = |\vec{PM}|$ より $\frac{1}{2\cos\theta} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ である。したがって $\frac{1}{2\cos\theta} = 1$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となる。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\theta = \frac{\pi}{3}$ である。

▶ 解法 2 (長さを先に定数化する方法)

【方針】

差と中点から共通方向ベクトル $\boldsymbol{v}$ を作る。その長さを計算すると $|PQ| = 2$, $|OM| = 1/\cos\theta$ と簡単になる。共線性と中点の位置関係から $|OP| = |OM| - |PM|$ として条件を解く。

【解答】

(1) 座標を差し引き、また平均を取ると

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \cos\theta(1 - \sqrt{3}\tan\theta, \sqrt{3} + \tan\theta), \\ \vec{OM} &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\tan\theta, \sqrt{3} + \tan\theta)\end{aligned}$$

である。

(2) $0 < \theta < \pi/2$ より $\cos\theta > 0$ であり、

$$\vec{OM} = \frac{1}{2\cos\theta}\vec{PQ}.$$

したがって OM は PQ と平行である。一方、 M は直線 PQ 上にあるので、直線 OM と直線 PQ は一致する。よって O, P, Q は同一直線上にある。

(3)

$$\boldsymbol{v} = (1 - \sqrt{3}\tan\theta, \sqrt{3} + \tan\theta)$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|^2 &= (1 - \sqrt{3}\tan\theta)^2 + (\sqrt{3} + \tan\theta)^2 \\ &= 4(1 + \tan^2\theta) = \frac{4}{\cos^2\theta}.\end{aligned}$$

したがって

$$|PQ| = \cos\theta|\boldsymbol{v}| = 2, \quad |OM| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}| = \frac{1}{\cos\theta}.$$

M は PQ の中点なので $|PM| = 1$ である。また上の正の係数関係から、直線上では O, P, M, Q の順に並ぶ。よって

$$|OP| = |OM| - |PM| = \frac{1}{\cos\theta} - 1.$$

条件 $|OP| = |PM| = 1$ より

$$\frac{1}{\cos\theta} - 1 = 1, \quad \cos\theta = \frac{1}{2}.$$

したがって

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度。長い座標式は差と中点を先に作ると共通方向ベクトルに整理できる。係数比較で直線上の位置を読む方法に加え、共通ベクトルの長さを計算すると $PQ=2$ 、 $OM=1/\cos\theta$ となり、条件を距離だけで解ける。正の係数から点の並びを確認しているため、 OP を和と差のどちらにするかも曖昧にならない。

【第 3 問】

袋の中に番号 1 のカードが 1 枚、番号 2 のカードが 2 枚、番号 3 のカードが 3 枚、番号 4 のカードが 4 枚、合計 10 枚入っている。この袋の中からカードを 1 枚ずつ引いていく。ただし、一度引いたカードは袋の中には戻さないものとする。 n 枚目で初めて 4 つすべての番号のカードが現れる事象を A_n 、初めて 4 つすべての番号のカードが現れたときに引いたカードが番号 j である事象を B_j とする。

- (1) A_{10} の起こる確率を求めよ。
- (2) $A_9 \cap B_1$ の起こる確率を求めよ。
- (3) A_9 が起こったときの B_1 が起こる条件付き確率を求めよ。

【方針】

「初めて 4 種類がそろう」とは、その直前までちょうど 1 種類の番号が 1 枚も出ていないということである。終盤の問題なので、不足している番号の全カードが残りの位置に入る必要がある。(1) では 10 枚目まで不足し続けられるのは 1 枚しかない番号 1 だけである。(2) は 9 枚目に番号 1 が初めて出る場合を数える。(3) では A_9 を、9 枚目で初めて出る番号が 1 の場合と 2 の場合に分け、条件付き確率を計算する。

【解答】

(1) A_{10} が起こるとは、9 枚目までに 4 種類すべては現れず、10 枚目で初めて 4 種類がそろうということである。10 枚目まで現れない番号があるなら、その番号のカードはすべて 10 枚目以降に残っていなければならない。しかし 10 枚目以降の位置は 10 枚目の 1 か所だけなので、そのような番号はカードが 1 枚しかない番号 1 に限られる。

したがって A_{10} は「番号 1 のカードが 10 枚目に引かれる」ことと同値である。番号 1 のカードの位置は 10 か所のうち等確率なので $P(A_{10}) = \frac{1}{10}$ である。

(2) $A_9 \cap B_1$ は、9 枚目で初めて 4 種類がそろい、その 9 枚目のカードが番号 1 である事象である。番号 1 のカードは 1 枚だけなので、これは番号 1 のカードが 9 枚目にあることと同値である。

実際、番号 1 が 9 枚目にあるとき、最初の 8 枚は番号 2,3,4 のカードから 8 枚引かれている。番号 2,3,4 のカードは合計 9 枚あり、その内訳は 2 枚、3 枚、4 枚であるから、そこから 1 枚だけ残して 8 枚を引けば、番号 2,3,4 はすべて少なくとも 1 枚ずつ現れている。したがって 9 枚目の番号 1 で初めて 4 種類がそろう。

よって $P(A_9 \cap B_1) = \frac{1}{10}$ である。

(3)

まず A_9 が起こる場合を分類する。8 枚目までに現れていない番号のカードは、9 枚目と 10 枚目の位置にすべて残っていなければならない。したがって、その番号のカード枚数は高々 2 枚である。可能なのは番号 1 または番号 2 だけである。

番号 1 が 9 枚目で初めて現れる場合の確率は、(2) より $\frac{1}{10}$ である。番号 2 が 9 枚目で初めて現れる場合は、番号 2 の 2 枚のカードが 9 枚目と 10 枚目に入っている場合である。番号 2 のカードが入る 2 つの位置は ${}_{10}C_2$ 通りが等確率なので、その確率は $\frac{1}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{45}$ である。このとき最初の 8 枚には番号 1,3,4 がすべて現れているので、確かに 9 枚目で初めて 4 種類がそろう。

したがって $P(A_9) = \frac{1}{10} + \frac{1}{45} = \frac{11}{90}$ である。求める条件付き確率は

$$P(B_1 | A_9) = \frac{P(A_9 \cap B_1)}{P(A_9)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{11}{90}} = \frac{9}{11}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 5。想定時間は 12 分程度。全体を直接順列で数えるより、「直前まで欠けている番号」のカード枚数に注目すると整理しやすい。 A_{10} では不足番号は 1 枚しかない番号 1 に限られ、 A_9 では番号 1 または番号 2 だけが可能である。この分類を明示しないと、番号 3 や 4 の場合を誤って含める危険がある。別解として全順列を分母にして数え上げる方法もあるが、位置の組合せで見る本解の方が簡潔でミスが少ない。

【第 4 問】

次の問に答えよ。

- (1) 整数 m に対して、 m^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを示せ。
 (2) 自然数 n, k が

$$25 \times 3^n = k^2 + 176 \quad \cdots \cdots (*)$$

を満たすとき、 n は偶数であることを示せ。

- (3) (2) の関係式 (*) を満たす自然数の組 (n, k) をすべて求めよ。

【方針】

(1) は偶奇で分けて平方数の 4 での余りを確認する。(2) は式を 4 で見て、 n が奇数だと左辺が 3 余り、平方数の余り 0, 1 と矛盾することを使う。(3) は $n = 2m$ とおき、左辺を平方にして平方差の形に因数分解する。2 つの因数は正の偶数で、積が 176、和が $10 \cdot 3^m$ になるので、可能な因数対をすべて調べる。

【解答】

(1)

整数 m は偶数または奇数である。 m が偶数なら $m = 2r$ と書けるので $m^2 = 4r^2$ となり、 m^2 は 4 で割って 0 余る。 m が奇数なら $m = 2r + 1$ と書けるので $m^2 = (2r + 1)^2 = 4r^2 + 4r + 1 = 4r(r + 1) + 1$ となり、 m^2 は 4 で割って 1 余る。したがって整数 m に対して、 m^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(2)

関係式 $25 \cdot 3^n = k^2 + 176$ を 4 で割った余りで考える。 $25 \equiv 1 \pmod{4}$, $176 \equiv 0 \pmod{4}$ であるから $3^n \equiv k^2 \pmod{4}$ である。

もし n が奇数なら、 $3 \equiv -1 \pmod{4}$ より $3^n \equiv 3 \pmod{4}$ である。しかし (1) より平方数 k^2 は 4 で割って 0 または 1 しか余らない。これは矛盾である。したがって n は偶数である。

(3)

(2) より n は偶数であるから、 $n = 2m$ とおける。ただし n は自然数なので m は自然数である。このとき $25 \cdot 3^n = 25 \cdot 3^{2m} = (5 \cdot 3^m)^2$ である。よって (*) は $(5 \cdot 3^m)^2 - k^2 = 176$ すなわち $(5 \cdot 3^m - k)(5 \cdot 3^m + k) = 176$ となる。 k は自然数なので、両因数は正である。また 2 つの因数の和は $(5 \cdot 3^m - k) + (5 \cdot 3^m + k) = 10 \cdot 3^m$ で偶数である。積 176 も偶数なので、2 つの因数はともに偶数でなければならない。

正の偶数の因数対 $(5 \cdot 3^m - k, 5 \cdot 3^m + k)$ として可能なのは $(2, 88)$, $(4, 44)$, $(8, 22)$ である。それぞれの和は 90, 48, 30 であり、これが $10 \cdot 3^m$ に等しくなければならない。したがって $10 \cdot 3^m = 90$ または $10 \cdot 3^m = 30$ だけが可能である。 $(2, 88)$ のとき、 $10 \cdot 3^m = 90$ より $3^m = 9$, したがって $m = 2$ である。また $2k = 88 - 2 = 86$ より $k = 43$ である。よって $(n, k) = (4, 43)$ を得る。 $(8, 22)$ のとき、 $10 \cdot 3^m = 30$ より $3^m = 3$, したがって $m = 1$ である。また $2k = 22 - 8 = 14$ より $k = 7$ である。よって $(n, k) = (2, 7)$ を得る。

以上より、求める自然数の組は $(n, k) = (2, 7)$, $(4, 43)$ である。

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 13 分程度。平方数の 4 での余りから n の偶奇を決め、その後に平方差で因数分解する整数問題である。(3) では因数対を列挙するだけでなく、2 因数の和が $10 \cdot 3^m$ になる条件まで確認する必要がある。 $(4, 44)$ は積だけなら候補に見えるが、和 48 が $10 \cdot 3^m$ にならないため除外される。別解として合同式をさらに重ねる方法もあるが、因数対の全調査が最も漏れにくい。