

北海道大学 2021 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

三角形 OAB において、辺 AB を $2:1$ に内分する点を D とし、直線 OA に関して点 D と対称な点を E とする。
 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とし、 $|\vec{a}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ を満たすとする。

- (1) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA との交点を F とする。 $\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (3) 三角形 BDE の面積が $\frac{5}{9}$ になるとき、 $|\vec{b}|$ の値を求めよ。

▶ 解法 1 (座標を置いて面積条件を処理する方法)

【方針】

(1)(2) は射影と対称移動で処理する。 F は B の OA への射影、 E は D の射影点を中点として反対側へ移した点である。
 (3) は座標を置くと最短で、 OA を x 軸、 $\vec{a} = (4, 0)$ としてよい。 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ から B の x 座標が決まり、三角形 BDE の面積は B の高さ成分だけで表せる。

【解答】

(1) F は点 B から直線 OA に下ろした垂線の足であるから、 $\overrightarrow{OF}$ は $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への射影である。したがって

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{6}{16} \vec{a} = \frac{3}{8} \vec{a}$$

である。

(2) D は AB を $2:1$ に内分するから $\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$ である。 D の直線 OA への射影点を H とすると

$$\overrightarrow{OH} = \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{OD}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

であり、

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{OD} = \frac{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}{3} = \frac{16 + 12}{3} = \frac{28}{3}$$

だから $\overrightarrow{OH} = \frac{7}{12} \vec{a}$ である。 E は D と直線 OA に関して対称なので、 H は DE の中点である。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{7}{6} \vec{a} - \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3} \\ &= \frac{5}{6} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}. \end{aligned}$$

(3)

直線 OA を x 軸に取り、 $\vec{a} = (4, 0)$ とし、 $\vec{b} = (p, q)$ とおくと、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$ より $4p = 6$, $p = \frac{3}{2}$ である。したがって $\vec{b} = (\frac{3}{2}, q)$ とおける。

この座標で

$$D = \frac{A + 2B}{3} = \left(\frac{4 + 2 \cdot \frac{3}{2}}{3}, \frac{2q}{3} \right) = \left(\frac{7}{3}, \frac{2q}{3} \right)$$

である。 E は D を x 軸に関して対称に移した点だから $E = \left(\frac{7}{3}, -\frac{2q}{3} \right)$ である。したがって DE は鉛直な線分で、その長さは $|DE| = \frac{4|q|}{3}$ である。また点 $B \left(\frac{3}{2}, q \right)$ から直線 $DE: x = \frac{7}{3}$ までの距離は $|\frac{7}{3} - \frac{3}{2}| = \frac{5}{6}$ である。よって

$$[\triangle BDE] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4|q|}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5|q|}{9}$$

である。これが $\frac{5}{9}$ に等しいので $|q| = 1$ である。

したがって

$$|\vec{b}|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + q^2 = \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

より $|\vec{b}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$ である。

▶ 解法 2 (高さだけを追う幾何的方法)

【方針】

(1)(2) は射影で求める。(3) では B から OA までの距離を h と置き、対称移動から $DE = 4h/3$ を得る。さらに D の射影点と F の間隔を内分比から求め、三角形の面積を高さ h だけで表す。

【解答】

(1) F は B の直線 OA への射影だから

$$\overrightarrow{OF} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} = \frac{3}{8} \vec{a}.$$

(2) D から OA に下ろした垂線の足を H とする。

$$\overrightarrow{OD} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$$

であるから、その $\vec{a}$ 方向の成分を取って

$$\overrightarrow{OH} = \frac{7}{12} \vec{a}$$

を得る。 H は DE の中点なので

$$\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD} = \frac{5}{6} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}.$$

(3) 点 B から直線 OA までの距離を h とする。 D は AB を $2:1$ に内分するので、 D から OA までの距離は $2h/3$ である。 D, E は OA に関して対称だから

$$|DE| = \frac{4h}{3}.$$

また

$$|OF| = \frac{3}{8} |\vec{a}| = \frac{3}{2}, \quad |OH| = \frac{7}{12} |\vec{a}| = \frac{7}{3}$$

であるから、 B から直線 DE までの距離は

$$|FH| = \frac{7}{3} - \frac{3}{2} = \frac{5}{6}$$

である。したがって

$$[\triangle BDE] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4h}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5h}{9}.$$

これが $5/9$ なので $h = 1$ である。直角三角形 OFB により

$$|\vec{b}|^2 = |OF|^2 + h^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{13}{4}.$$

よって

$$|\vec{b}| = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度。前半は射影・対称移動、後半は面積条件である。座標法では B の横座標が $3/2$ に固定され、幾何的方法では B の高さ h だけで DE と三角形の面積を表せる。異なる 2 解法で高さの絶対値が 1、したがってベクトル b の長さが平方根 $\sqrt{13}/2$ となることを確認した。面積では符号ではなく距離を使う点に注意する。

【第 2 問】

a を $a \neq -3$ を満たす定数とする。放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の点 $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ における接線を l_1 、点 $B\left(a+2, \frac{(a+2)^2}{2}\right)$ における接線を l_2 とする。 l_1 と l_2 の交点を C とおく。

(1) C の座標を a を用いて表せ。

(2) a が $a > 0$ を満たしながら動くとき、 $\frac{|AB|}{|BC|}$ が最小となるときの a の値を求めよ。ただし、 $|AB|$ および $|BC|$ はそれぞれ線分 AB と線分 BC の長さを表す。

▶ 解法 1 (距離比の 2 乗を微分する方法)

【方針】

放物線 $y = x^2/2$ の $x = t$ における接線を一般形で書き、 $t = -1$ と $t = a+2$ を代入して 2 本の接線を得る。交点 C は連立で求める。距離比は正なので、 $|AB|/|BC|$ の代わりに 2 乗を最小化する。 AB と BC の成分には共通因子 $a+3$ が出るが、 $a \neq -3$ なので比では消える。最後は有理関数を微分して増減を判定する。

【解答】

(1) $y = \frac{1}{2}x^2$ の導関数は $y' = x$ である。したがって $x = t$ における接線は $y - \frac{t^2}{2} = t(x - t)$ すなわち $y = tx - \frac{t^2}{2}$ である。

点 A は $t = -1$ に対応するから $l_1: y = -x - \frac{1}{2}$ である。また点 B は $t = a+2$ に対応するから $l_2: y = (a+2)x - \frac{(a+2)^2}{2}$ である。交点 C では $-x - \frac{1}{2} = (a+2)x - \frac{(a+2)^2}{2}$ だから $(a+3)x = \frac{(a+2)^2 - 1}{2} = \frac{(a+1)(a+3)}{2}$ である。 $a \neq -3$ より $x = \frac{a+1}{2}$ であり、これを l_1 に代入して $y = -\frac{a+1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{a+2}{2}$ を得る。したがって $C = \left(\frac{a+1}{2}, -\frac{a+2}{2}\right)$ である。

(2) $A = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $B = \left(a+2, \frac{(a+2)^2}{2}\right)$ であるから

$$\overrightarrow{AB} = \left(a+3, \frac{(a+2)^2 - 1}{2}\right) = \left(a+3, \frac{(a+1)(a+3)}{2}\right)$$

である。よって

$$|AB|^2 = (a+3)^2 \left\{1 + \frac{(a+1)^2}{4}\right\} = \frac{(a+3)^2(a^2 + 2a + 5)}{4}$$

である。

また

$$\overrightarrow{BC} = \left(\frac{a+1}{2} - (a+2), -\frac{a+2}{2} - \frac{(a+2)^2}{2}\right) = \left(-\frac{a+3}{2}, -\frac{(a+2)(a+3)}{2}\right)$$

である。したがって $|BC|^2 = \frac{(a+3)^2}{4} \{1 + (a+2)^2\} = \frac{(a+3)^2(a^2 + 4a + 5)}{4}$ である。 $a > 0$ では $a+3 \neq 0$ なので、 $\left(\frac{|AB|}{|BC|}\right)^2 = \frac{a^2 + 2a + 5}{a^2 + 4a + 5}$ となる。この関数を $R(a)$ とおく。分母は常に正であり、

$$\begin{aligned} R'(a) &= \frac{(2a+2)(a^2 + 4a + 5) - (a^2 + 2a + 5)(2a+4)}{(a^2 + 4a + 5)^2} \\ &= \frac{2(a^2 - 5)}{(a^2 + 4a + 5)^2} \end{aligned}$$

である。したがって $0 < a < \sqrt{5}$ では $R'(a) < 0$ 、 $a > \sqrt{5}$ では $R'(a) > 0$ となる。よって $R(a)$ 、したがって $\frac{|AB|}{|BC|}$ が最小となるのは $a = \sqrt{5}$ のときである。

▶ 解法 2 (相加相乗平均で距離比を評価する方法)

【方針】

接線の交点と距離比の式までは成分計算で求める。距離比の 2 乗を 1 から正の項を引く形にし、その項の分母を $a+4+5/a$ と変形する。相加相乗平均により微分せず等号条件を決める。

【解答】

(1) $x = t$ における接線は

$$y = tx - \frac{t^2}{2}$$

である。 $t = -1, a+2$ を代入した 2 直線を連立すると

$$C = \left(\frac{a+1}{2}, -\frac{a+2}{2} \right)$$

を得る。

(2) 成分から距離の 2 乗を計算すると

$$|AB|^2 = \frac{(a+3)^2(a^2+2a+5)}{4}, \quad |BC|^2 = \frac{(a+3)^2(a^2+4a+5)}{4}.$$

$a > 0$ なので $a+3 \neq 0$ であり、距離比の 2 乗は

$$R = \left(\frac{|AB|}{|BC|} \right)^2 = \frac{a^2+2a+5}{a^2+4a+5} = 1 - \frac{2a}{a^2+4a+5}.$$

したがって R を最小にするには

$$\frac{2a}{a^2+4a+5} = \frac{2}{a+4+\frac{5}{a}}$$

を最大にすればよい。 $a > 0$ だから、相加相乗平均により

$$a + \frac{5}{a} \geq 2\sqrt{5}$$

であり、等号は $a = \sqrt{5}$ のときに成り立つ。よって分母が最小、したがって上の分数が最大となるのは

$$a = \sqrt{5}$$

のときである。正の平方根を取る操作は大小関係を保つので、元の距離比も同じ a で最小になる。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度。接線公式、交点、距離比の順に処理する。距離比は 2 乗して共通因子を消すと有理式になる。微分法では増減が切り替わる点を確認し、別解では 1 から引く項を最大化して相加相乗平均を用いた。両方の等号条件が $a = \sqrt{5}$ で一致するため、最小点の取り違えも検出できる。

【第 3 問】

正の実数 x, y が、方程式

$$\frac{9^{4x} + 9^{y^2+1}}{6} = 3^{4x+y^2} \quad \dots\dots (\star)$$

を満たすとする。

(1) y^2 を x を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y が $(\star)$ および $1 - \frac{x}{y} > 0$ を満たしながら動くとき、

$$\frac{1}{\log_{1+\frac{x}{y}} 4} + \frac{1}{\log_{1-\frac{x}{y}} 4}$$

の最大値を求めよ。

▶ 解法 1 (平方の不等式で比を最小化する方法)

【方針】

指数はすべて底 3 にそろえ、 $u = 3^{4x}$, $v = 3^{y^2+1}$ とおくと $u^2 + v^2 = 2uv$ になり、 $(u-v)^2 = 0$ から $y^2 = 4x - 1$ が出る。後半は $r = x/y$ とおくと、対数式は底の変換により $\log_4(1-r^2)$ にまとまる。 $\log_4$ は増加関数なので、 $r^2 = x^2/(4x-1)$ を最小化すればよい。最小化は平方完成型の不等式で処理し、微分による確認を別解として添える。

【解答】

(1)

与式の両辺を底 3 で表すと $\frac{3^{8x} + 3^{2y^2+2}}{6} = 3^{4x+y^2}$ である。両辺に 6 を掛けると $3^{8x} + 3^{2y^2+2} = 6 \cdot 3^{4x+y^2}$ となる。ここで $u = 3^{4x}$, $v = 3^{y^2+1}$ とおくと、左辺は $u^2 + v^2$ であり、右辺は $2uv$ である。したがって $u^2 + v^2 = 2uv$ すなわち $(u-v)^2 = 0$ である。よって $u = v$ であり、 $3^{4x} = 3^{y^2+1}$ となる。指数を比べて $y^2 = 4x - 1$ である。

(2) $r = \frac{x}{y}$ とおく。条件 $1 - \frac{x}{y} > 0$ と $x, y > 0$ より $0 < r < 1$ である。底の変換公式を用いると

$$\frac{1}{\log_{1+r} 4} = \log_4(1+r), \quad \frac{1}{\log_{1-r} 4} = \log_4(1-r)$$

である。したがって求める式は $\log_4(1+r) + \log_4(1-r) = \log_4(1-r^2)$ である。

(1) より $y^2 = 4x - 1$ だから $r^2 = \frac{x^2}{y^2} = \frac{x^2}{4x-1}$ である。ここで $y > 0$ より $4x - 1 > 0$ である。すると

$$\frac{x^2}{4x-1} - \frac{1}{4} = \frac{4x^2 - (4x-1)}{4(4x-1)} = \frac{(2x-1)^2}{4(4x-1)} \geq 0$$

であるから $r^2 \geq \frac{1}{4}$ である。等号は $x = \frac{1}{2}$ のとき成り立つ。このとき $y^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1$ で、 $y = 1$ であり、実際に $r = \frac{1}{2}$ となって条件 $0 < r < 1$ を満たす。

よって $1 - r^2$ の最大値は $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。 $\log_4 X$ は $X > 0$ で増加関数だから、求める最大値は $\log_4 \frac{3}{4}$ である。

▶ 解法 2 (微分で比の増減を調べる方法)

【方針】

指数式を平方の形にして $y^2 = 4x - 1$ を得る。対数式を $\log_4(1 - r^2)$ にまとめた後、 $r^2 = x^2/(4x - 1)$ を微分し、減少から増加へ切り替わる点を求める。

【解答】

(1) $u = 3^{4x}$, $v = 3^{y^2+1}$ とおくと、与式は

$$u^2 + v^2 = 2uv$$

となる。よって $(u - v)^2 = 0$ であり、 $u = v$ だから

$$y^2 = 4x - 1$$

を得る。

(2) $r = x/y$ とおくと、条件から $0 < r < 1$ である。底の変換により、求める式は

$$\log_4(1 + r) + \log_4(1 - r) = \log_4(1 - r^2)$$

となる。(1) より

$$r^2 = \frac{x^2}{4x - 1}, \quad x > \frac{1}{4}.$$

ここで

$$\left(\frac{x^2}{4x - 1} \right)' = \frac{2x(2x - 1)}{(4x - 1)^2}.$$

したがって $1/4 < x < 1/2$ では減少し、 $x > 1/2$ では増加する。よって r^2 の最小値は $x = 1/2$ のときの $1/4$ である。このとき $y = 1$ となり、条件も満たす。

ゆえに $1 - r^2$ の最大値は $3/4$ である。 $\log_4 X$ は増加関数なので、求める最大値は

$$\log_4 \frac{3}{4}$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 13 分程度。指数式を同じ底にそろえ、平方が 0 になる形へ持ち込むのが核心である。後半は逆数になった対数を底 4 の対数へ直すと 1 つにまとまる。比の 2 乗は平方の不等式と微分の 2 通りで最小値 $1/4$ を確認した。最大値が負になるが、対数の真数 $3/4$ が 1 未満なので整合している。

【第 4 問】

$a_1 = 2, b_1 = 1$ および

$$a_{n+1} = 2a_n + 3b_n, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められた数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある。 $c_n = a_nb_n$ とおく。

- (1) c_2 を求めよ。
- (2) c_n は偶数であることを示せ。
- (3) n が偶数のとき、 c_n は 28 で割り切れることを示せ。

▶ 解法 1 (法ごとの周期を調べる方法)

【方針】

(1) は漸化式に直接代入する。(2) は 2 で割った余りを追うと、 (a_n, b_n) の偶奇が入れ替わるため、常に少なくとも一方が偶数であることが分かる。(3) は n が偶数のときに $4 \mid b_n$ と $7 \mid a_nb_n$ を別々に示す。4 と 7 は互いに素なので、合同式の周期表を用いて両方の割り切れを確認する。

【解答】

(1)

漸化式より $a_2 = 2a_1 + 3b_1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$ であり、 $b_2 = a_1 + 2b_1 = 2 + 2 \cdot 1 = 4$ である。したがって $c_2 = a_2b_2 = 7 \cdot 4 = 28$ である。

(2) 2 で割った余りを考える。漸化式から $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n \equiv b_n \pmod{2}$ であり、 $b_{n+1} = a_n + 2b_n \equiv a_n \pmod{2}$ である。初期値は $(a_1, b_1) \equiv (0, 1) \pmod{2}$ なので、次の項では $(1, 0)$ 、さらに次では $(0, 1)$ に戻る。したがって任意の n について、 a_n, b_n の一方は偶数、もう一方は奇数である。よって $c_n = a_nb_n$ は偶数である。

(3)

まず 4 で割った余りを調べる。漸化式を用いると $(a_n, b_n) \equiv (2, 1), (3, 0), (2, 3), (1, 0) \pmod{4}$ をこの順に繰り返す。実際、 $(1, 0)$ の次は $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 1 + 2 \cdot 0) \equiv (2, 1) \pmod{4}$ となり初めに戻る。したがって n が偶数のときは常に $b_n \equiv 0 \pmod{4}$ である。よって $4 \mid c_n$ である。

次に 7 で割った余りを調べる。同じく漸化式で順に計算すると

$n \pmod{8}$	1	2	3	4	5	6	7	0	
(a_n, b_n)	(2, 1)	(0, 4)	(5, 1)	(6, 0)	(5, 6)	(0, 3)	(2, 6)	(1, 0)	$\pmod{7}$

となる。最後の $(1, 0)$ の次は $(2 \cdot 1 + 3 \cdot 0, 1 + 2 \cdot 0) \equiv (2, 1) \pmod{7}$ であるから、この表は周期的に繰り返される。表を見ると、 n が偶数のときは a_n または b_n の少なくとも一方が 7 の倍数である。したがって $7 \mid c_n$ である。

以上より、 n が偶数のとき c_n は 4 と 7 の両方で割り切れる。4 と 7 は互いに素なので、 $28 \mid c_n$ である。

▶ 解法 2 (2 項先の積を直接結ぶ方法)

【方針】

(1)(2) は直接計算と偶奇で処理する。(3) では漸化式を 2 回適用して a_{n+2}, b_{n+2} を a_n, b_n で表す。その積を展開すると $c_{n+2} - 97c_n$ が 28 の倍数になり、偶数番目の項がすべて c_2 と同じ余りをもつことが分かる。

【解答】

(1)

$$a_2 = 7, \quad b_2 = 4$$

であるから

$$c_2 = 28$$

である。

(2) 漸化式を 2 で見ると

$$a_{n+1} \equiv b_n, \quad b_{n+1} \equiv a_n \pmod{2}.$$

初期状態は $(a_1, b_1) \equiv (0, 1) \pmod{2}$ なので、 $(0, 1)$ と $(1, 0)$ を交互に取る。したがって常に一方が偶数であり、 $c_n = a_n b_n$ は偶数である。

(3) 漸化式をもう一度用いると

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 2(2a_n + 3b_n) + 3(a_n + 2b_n) = 7a_n + 12b_n, \\ b_{n+2} &= (2a_n + 3b_n) + 2(a_n + 2b_n) = 4a_n + 7b_n. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= (7a_n + 12b_n)(4a_n + 7b_n) \\ &= 28a_n^2 + 97a_n b_n + 84b_n^2 \\ &= 97c_n + 28(a_n^2 + 3b_n^2). \end{aligned}$$

したがって

$$c_{n+2} \equiv 97c_n \equiv 13c_n \pmod{28}.$$

ここで $c_2 = 28 \equiv 0 \pmod{28}$ である。上の関係を $n = 2, 4, 6, \dots$ と順に用いれば、すべての正の整数 m について

$$c_{2m} \equiv 0 \pmod{28}$$

となる。ゆえに n が偶数なら c_n は 28 で割り切れる。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度。偶奇は 2 での状態交換だけで示せる。28 の倍数性には、4 と 7 の周期を個別に確認する方法と、2 項先の積を直接結んで偶数番目だけを帰納的に追う方法がある。後者では c の係数 97 をそのまま 28 で 1 と誤認しないことが注意点だが、 c_2 が 0 余りなので結論には十分である。両解法を初期項でも検算した。

【第 5 問】

座標平面上で、媒介変数 θ を用いて

$$x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

と表される曲線 C がある。 C 上の点で x 座標の値が最小になる点を A とし、 A の x 座標の値を a とおく。 B を点 $(a, 0)$ 、 O を原点 $(0, 0)$ とする。

- (1) a を求めよ。
 (2) 線分 AB と線分 OB と C で囲まれた部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (媒介変数のまま面積を積分する方法)

【方針】

x 座標は $u = \cos \theta$ とおくと $u^2 + u$ になるので、 $-1 \leq u \leq 1$ で最小化する。面積は、点 A から O までの曲線部分と、 $x = a$ 、 x 軸で囲まれる部分であり、 $2\pi/3 \leq \theta \leq \pi$ では x が a から 0 へ増加する。したがって面積積分を媒介変数で書き、符号を確認しながら積分する。

【解答】

(1) $x = (1 + \cos \theta) \cos \theta = \cos^2 \theta + \cos \theta$ である。 $u = \cos \theta$ とおくと、 $0 \leq \theta \leq \pi$ より $-1 \leq u \leq 1$ であり、 $x = u^2 + u = (u + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ である。したがって最小値は $u = -\frac{1}{2}$ のとき $a = -\frac{1}{4}$ である。このとき $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ だから、対応する θ は $\theta = \frac{2\pi}{3}$ である。

(2)

(1) より

$$A = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad B = \left(-\frac{1}{4}, 0\right)$$

である。曲線は $\theta = \frac{2\pi}{3}$ で A を通り、 $\theta = \pi$ で $(x, y) = (0, 0) = O$ を通る。

また

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos^2 \theta + \cos \theta) = -\sin \theta(1 + 2 \cos \theta)$$

である。 $\frac{2\pi}{3} < \theta < \pi$ では $\sin \theta > 0$ 、 $1 + 2 \cos \theta < 0$ なので $\frac{dx}{d\theta} > 0$ である。したがってこの範囲で x は a から 0 まで増加する。求める面積 S は

$$S = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

で表される。

ここで $y = \sin \theta$ だから

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin \theta \{-\sin \theta(1 + 2 \cos \theta)\} d\theta \\ &= -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 \theta(1 + 2 \cos \theta) d\theta. \end{aligned}$$

右辺を 2 つに分けると

$$S = -\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta - 2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$$

である。まず

$$\int \sin^2 \theta d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}$$

より

$$\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

である。また $u = \sin \theta$ とおくと

$$2 \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = \frac{2}{3} [\sin^3 \theta]_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

である。したがって

$$S = -\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}$$

である。

▶ 解法 2 (余弦を変数にして面積を積分する方法)

【方針】

$u = \cos \theta$ とおき、曲線を $x = u^2 + u$, $y = \sqrt{1-u^2}$ と見る。最小点から原点まででは u が $-1/2$ から -1 へ動くので、向きを保ったまま面積積分を u で表す。

【解答】

(1) $u = \cos \theta$ とおくと $-1 \leq u \leq 1$ であり、

$$x = u^2 + u = \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

よって $u = -1/2$ のとき最小となり、

$$a = -\frac{1}{4}$$

である。

(2) 点 A から原点 O までの曲線部分では、 u は $-1/2$ から -1 へ動く。また

$$y = \sqrt{1-u^2}, \quad dx = (2u+1) du.$$

したがって求める面積 S は

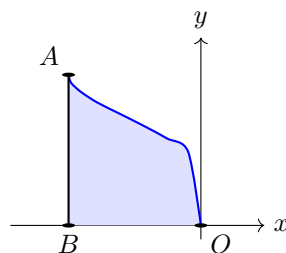
$$S = \int_{-1/2}^{-1} \sqrt{1-u^2} (2u+1) du.$$

原始関数は

$$-\frac{2}{3}(1-u^2)^{3/2} + \frac{1}{2} \left(u\sqrt{1-u^2} + \sin^{-1} u \right)$$

であるから、

$$\begin{aligned} S &= \left[-\frac{2}{3}(1-u^2)^{3/2} + \frac{1}{2} \left(u\sqrt{1-u^2} + \sin^{-1} u \right) \right]_{-1/2}^{-1} \\ &= -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$



【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度。x 座標は余弦を変数にした二次関数として最小化できる。面積は媒介変数のまま積分する方法と、 $u = \cos \theta$ で曲線を円弧の平方根として扱う方法の 2 通りで確認した。どちらも A から O へ進むと x は増える一方、 u は減るため、積分区間の向きに注意する。図で囲まれる領域と端点を確認済みである。