

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2022 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

$0 \leq a \leq b \leq 1$ をみたす a, b に対し, 関数

$$f(x) = |x(x-1)| + |(x-a)(x-b)|$$

を考える。 x が実数の範囲を動くとき, $f(x)$ は最小値 m をもつとする。

- (1) $x < 0$ および $x > 1$ では $f(x) > m$ となることを示せ。
- (2) $m = f(0)$ または $m = f(1)$ であることを示せ。
- (3) a, b が $0 \leq a \leq b \leq 1$ をみたして動くとき, m の最大値を求めよ。

第 2 問

a は $a \neq 1$ をみたす正の実数とする。 xy 平面上の点 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ および $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ が, すべての自然数 n について

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{P_n Q_n}, \quad \overrightarrow{Q_n Q_{n+1}} = \left(0, \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする。また, P_n の座標を (x_n, y_n) とする。

- (1) x_{n+2} を a, x_n, x_{n+1} で表せ。
- (2) $x_1 = 0, x_2 = 1$ のとき, 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) $y_1 = \frac{a}{(1-a)^2}, y_2 - y_1 = 1$ のとき, 数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

第 3 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 連立不等式 $x \geq 2, 2^x \leq x^y \leq x^2$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。ただし、自然対数の底 e が $2 < e < 3$ をみたすことを用いてよい。
- (2) $a > 0$ に対して、連立不等式 $2 \leq x \leq 6, (x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geq 0$ の表す xy 平面上の領域の面積を $S(a)$ とする。 $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

第 4 問

アルファベットの A と書かれた玉が 1 個，D と書かれた玉が 1 個，H と書かれた玉が 1 個，I と書かれた玉が 1 個，K と書かれた玉が 2 個，O と書かれた玉が 2 個ある。これら 8 個の玉を円形に並べる。

- (1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ。
- (2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ。ここで子音とは，D，H，K の 3 文字（玉は 4 個）のことである。
- (3) 隣り合う子音が存在するとき，それが KK だけである条件つき確率を求めよ。

第 5 問

複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし、 $\bar{z}$ を z と共役な複素数とし、 i を虚数単位とする。

$$z\bar{z} = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad |z| = |z - \sqrt{3} + i| \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- (1) ①, ②それぞれの方程式について, その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。
- (2) ①, ②の共通解となる複素数をすべて求めよ。
- (3) (2) で求めたすべての複素数の積を w とおく。このとき, w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)