

## 北海道大学 2022 年度 理系

## 解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

## 【第 1 問】

 $0 \leq a \leq b \leq 1$  をみたす  $a, b$  に対し、関数

$$f(x) = |x(x-1)| + |(x-a)(x-b)|$$

を考える。 $x$  が実数の範囲を動くとき、 $f(x)$  は最小値  $m$  をもつとする。

- (1)  $x < 0$  および  $x > 1$  では  $f(x) > m$  となることを示せ。
- (2)  $m = f(0)$  または  $m = f(1)$  であることを示せ。
- (3)  $a, b$  が  $0 \leq a \leq b \leq 1$  をみたして動くとき、 $m$  の最大値を求めよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

絶対値の符号は、点  $0, a, b, 1$  を境に変わる。まず  $x < 0, x > 1$  では 2 つの積がどちらも正になり、 $f(0)$  または  $f(1)$  より大きいことを示して最小候補から外す。次に  $[0, 1]$  内を  $[0, a], [a, b], [b, 1]$  に分け、線形または上に凸の 2 次式として端点だけを調べればよいことを示す。最後に  $m = \min\{ab, (1-a)(1-b)\}$  を得て、その最大値を求める。

## 【解答】

(1)  $x < 0$  のとき、 $x < 0 \leq a \leq b \leq 1$  だから  $x(x-1) > 0$ ,  $(x-a)(x-b) > 0$  である。よって  $f(x) = x(x-1) + (x-a)(x-b) = 2x^2 - (1+a+b)x + ab$  である。ここで  $x < 0$  なので  $2x^2 > 0$  かつ  $-(1+a+b)x > 0$  であり、 $f(x) > ab = f(0) \geq m$  となる。

次に  $x > 1$  のときも、 $x(x-1) > 0, (x-a)(x-b) > 0$  であるから同じく  $f(x) = 2x^2 - (1+a+b)x + ab$  である。この式を  $F(x)$  とおくと  $F'(x) = 4x - (1+a+b)$  であり、 $x > 1, a+b \leq 2$  より  $F'(x) > 4 - (1+a+b) \geq 1 > 0$  である。したがって  $x > 1$  では  $F(x) > F(1)$  であり、 $f(x) > f(1) \geq m$  となる。

(2) (1) より、最小値は  $0 \leq x \leq 1$  の範囲で考えればよい。 $0 \leq x \leq a$  では  $x(x-1) \leq 0$ ,  $(x-a)(x-b) \geq 0$  なので  $f(x) = -x(x-1) + (x-a)(x-b) = (1-a-b)x + ab$  である。これは一次関数だから、この区間での最小値は端点  $x = 0, a$  のいずれかでとる。 $a \leq x \leq b$  では  $x(x-1) \leq 0$ ,  $(x-a)(x-b) \leq 0$  なので  $f(x) = -x(x-1) - (x-a)(x-b) = -2x^2 + (1+a+b)x - ab$  である。これは上に凸の 2 次関数であるから、この区間での最小値は端点  $x = a, b$  のいずれかでとる。 $b \leq x \leq 1$  では  $x(x-1) \leq 0$ ,  $(x-a)(x-b) \geq 0$  なので、再び  $f(x) = (1-a-b)x + ab$  であり、最小値は端点  $x = b, 1$  のいずれかでとる。

したがって  $[0, 1]$  での最小値は  $f(0), f(a), f(b), f(1)$  のいずれかである。ここで  $f(0) = ab$ ,  $f(1) = (1-a)(1-b)$ ,  $f(a) = a(1-a)$ ,  $f(b) = b(1-b)$  である。 $a+b \leq 1$  なら、 $b \leq 1-a$  かつ  $a \leq 1-b$  であるから  $ab \leq a(1-a)$ ,  $ab \leq b(1-b)$  である。よってこの場合は  $f(0)$  が  $f(a), f(b)$  以下である。 $a+b \geq 1$  なら、 $1-b \leq a$  かつ  $1-a \leq b$  であるから  $(1-a)(1-b) \leq a(1-a)$ ,  $(1-a)(1-b) \leq b(1-b)$  である。よってこの場合は  $f(1)$  が  $f(a), f(b)$  以下である。

以上より、最小値  $m$  は必ず  $m = f(0)$  または  $m = f(1)$  である。

(3) (2) より  $m = \min\{ab, (1-a)(1-b)\}$  である。 $a+b \leq 1$  のときは  $ab \leq (1-a)(1-b)$  なので  $m = ab$  である。このとき  $b \leq 1-a$  だから  $m = ab \leq a(1-a) \leq \frac{1}{4}$  である。 $a+b \geq 1$  のときは  $(1-a)(1-b) \leq ab$  なので  $m = (1-a)(1-b)$  である。 $u = 1-b, v = 1-a$  とおくと、 $0 \leq u \leq v$  かつ  $u+v \leq 1$  であり、 $m = uv \leq \frac{1}{4}$  である。

一方、 $a = b = \frac{1}{2}$  とすると  $f(0) = f(1) = \frac{1}{4}$  であり、(2) より  $m = \frac{1}{4}$  である。したがって  $m$  の最大値は  $\frac{1}{4}$  である。

## ▶ 別解 (対称変換と最小値の直接評価)

## 【方針】

$a + b \leq 1$  の場合に  $f(x) \geq ab$  を区間ごとに直接示す。 $a + b \geq 1$  は  $(x, a, b) \mapsto (1 - x, 1 - b, 1 - a)$  の対称性で前者へ帰着する。最大値は 2 候補の積による上界で一度に評価する。

## 【解答】

(1)  $x < 0$  では

$$f(x) = 2x^2 - (1 + a + b)x + ab > ab = f(0) \geq m.$$

次に

$$x' = 1 - x, \quad a' = 1 - b, \quad b' = 1 - a$$

と置くと  $0 \leq a' \leq b' \leq 1$  であり、直接代入から

$$f_{a,b}(x) = f_{a',b'}(x')$$

が成り立つ。 $x > 1$  なら  $x' < 0$  だから、上の結果を変換後の関数へ適用して

$$f_{a,b}(x) > f_{a',b'}(0) = f_{a,b}(1) \geq m.$$

(2) まず  $a + b \leq 1$  とする。 $0 \leq x \leq a$  および  $b \leq x \leq 1$  では

$$f(x) = ab + (1 - a - b)x \geq ab.$$

$a \leq x \leq b$  では

$$f(x) = -2x^2 + (1 + a + b)x - ab$$

は上に凸であるから、区間内の最小値は端点でとる。しかも

$$f(a) = a(1 - a) \geq ab, \quad f(b) = b(1 - b) \geq ab$$

である。よって全区間で  $f(x) \geq ab = f(0)$ 、したがって  $m = f(0)$  である。

$a + b \geq 1$  の場合は上の対称変換により  $a' + b' = 2 - a - b \leq 1$  となる。したがって変換後の最小値は  $f_{a',b'}(0) = f_{a,b}(1)$  であり、 $m = f(1)$  である。以上で  $m = f(0)$  または  $m = f(1)$  が示された。

(3) (2) より

$$m = \min\{ab, (1 - a)(1 - b)\}.$$

したがって

$$m^2 \leq ab(1 - a)(1 - b) = \{a(1 - a)\}\{b(1 - b)\} \leq \frac{1}{16}.$$

$m \geq 0$  だから  $m \leq 1/4$  である。一方、 $a = b = 1/2$  なら 2 候補はともに  $1/4$  となる。ゆえに最大値は

$$\frac{1}{4}$$

である。

【総評】 絶対値付き関数の最小値を、区間分割と端点比較で絞り込む問題。目安時間は 18~25 分。(1) で実数全体から  $[0, 1]$  へ範囲を狭め、(2) で候補を  $0, 1$  へ落とす設問連鎖が重要である。区分二次式による主解法と、 $x \mapsto 1 - x$  の対称性を使う別解が相互検算になる。公式講評では絶対値を適切に外せず (3) まで進めない答案が多く、各区間の符号表を先に作ることが実戦上の要点とされる。最大値  $1/4$  は等号条件  $a = b = 1/2$  まで確認する。

【第 2 問】

$a$  は  $a \neq 1$  をみたす正の実数とする。 $xy$  平面上の点  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  および  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$  が、すべての自然数  $n$  について

$$\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{P_n Q_n}, \quad \overrightarrow{Q_n Q_{n+1}} = \left(0, \frac{a^{-n}}{1-a}\right)$$

をみたしているとする。また、 $P_n$  の座標を  $(x_n, y_n)$  とする。

- (1)  $x_{n+2}$  を  $a, x_n, x_{n+1}$  で表せ。
- (2)  $x_1 = 0, x_2 = 1$  のとき、数列  $\{x_n\}$  の一般項を求めよ。
- (3)  $y_1 = \frac{a}{(1-a)^2}, y_2 - y_1 = 1$  のとき、数列  $\{y_n\}$  の一般項を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$Q_n$  の座標を補助的に置き、 $P_{n+1} = aP_n + (1-a)Q_n$  と  $Q_{n+1} - Q_n = (0, \frac{a^{-n}}{1-a})$  から  $Q_n$  を消去する。 $x$  座標では非同次項が出ず、特性方程式の解  $1, a$  で一般項を求める。 $y$  座標では  $a^{-n}$  の非同次項が残るので、 $Ca^{-n}$  型の特解を足してから初期条件を代入する。

【解答】

(1)  $Q_n$  の座標を  $(u_n, v_n)$  とする。条件  $\overrightarrow{P_n P_{n+1}} = (1-a)\overrightarrow{P_n Q_n}$  より  $P_{n+1} = P_n + (1-a)(Q_n - P_n) = aP_n + (1-a)Q_n$  である。したがって  $x$  座標について  $x_{n+1} = ax_n + (1-a)u_n$  である。

また、 $\overrightarrow{Q_n Q_{n+1}}$  の  $x$  成分は 0 なので  $u_{n+1} = u_n$  である。よって  $x_{n+2} = ax_{n+1} + (1-a)u_{n+1} = ax_{n+1} + (1-a)u_n$  である。一方、 $x_{n+1} = ax_n + (1-a)u_n$  から  $(1-a)u_n = x_{n+1} - ax_n$  なので、これを代入して  $x_{n+2} = ax_{n+1} + x_{n+1} - ax_n = (a+1)x_{n+1} - ax_n$  を得る。

(2) (1) より  $x_{n+2} = (a+1)x_{n+1} - ax_n$  である。特性方程式は  $\lambda^2 - (a+1)\lambda + a = 0$  すなわち  $(\lambda-1)(\lambda-a) = 0$  である。 $a \neq 1$  だから、 $x_n = A + Ba^{n-1}$  と表せる。

初期条件  $x_1 = 0, x_2 = 1$  より  $A + B = 0, \quad A + Ba = 1$  である。これを解いて  $B = \frac{1}{a-1}, \quad A = -\frac{1}{a-1}$  となる。したがって  $x_n = \frac{a^{n-1} - 1}{a-1}$  である。

(3)  $y$  座標について考える。 $P_{n+1} = aP_n + (1-a)Q_n$  より  $y_{n+1} = ay_n + (1-a)v_n$  である。また条件から  $v_{n+1} = v_n + \frac{a^{-n}}{1-a}$  である。したがって

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= ay_{n+1} + (1-a)v_{n+1} \\ &= ay_{n+1} + (1-a)v_n + a^{-n} \\ &= ay_{n+1} + \{y_{n+1} - ay_n\} + a^{-n} \end{aligned}$$

である。よって  $y_{n+2} = (a+1)y_{n+1} - ay_n + a^{-n}$  を得る。

この非同次漸化式の同次部分の解は、(2) と同じく  $A + Ba^{n-1}$  である。非同次項が  $a^{-n}$  なので、特解を  $Ca^{-n}$  とおく。代入すると  $Ca^{-n-2} - (a+1)Ca^{-n-1} + aCa^{-n} = a^{-n}$  である。両辺に  $a^{n+2}$  をかけると  $C\{1 - a(a+1) + a^3\} = a^2$  であり、 $1 - a(a+1) + a^3 = (a-1)^2(a+1)$  だから  $C = \frac{a^2}{(a-1)^2(a+1)}$  である。したがって  $y_n = A + Ba^{n-1} + \frac{a^2}{(a-1)^2(a+1)}a^{-n}$  と表せる。

ここで

$$y_1 = \frac{a}{(1-a)^2} = \frac{a}{(a-1)^2}, \quad y_2 = y_1 + 1 = \frac{a}{(a-1)^2} + 1$$

である。これを上の式に代入して整理すると  $A = 0, \quad B = \frac{a^2}{(a-1)^2(a+1)}$  となる。よって  $y_n = \frac{a^2}{(a-1)^2(a+1)}(a^{n-1} + a^{-n})$  である。

## ▶ 別解 (階差と 1 階漸化式への還元)

## 【方針】

2 階漸化式を特性方程式で解かず、階差へ落とす。 $x_n$  は等比階差、 $y_n$  は  $y_{n+1} - ay_n$  を新しい数列とみなして 2 回の等比和で処理する。

## 【解答】

(1) 主解法と同様に  $Q_n = (u_n, v_n)$  と置けば

$$x_{n+2} = (a+1)x_{n+1} - ax_n.$$

(2)  $d_n = x_{n+1} - x_n$  と置くと、(1) より

$$d_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} = a(x_{n+1} - x_n) = ad_n.$$

$d_1 = x_2 - x_1 = 1$  だから  $d_n = a^{n-1}$  である。よって

$$x_n = x_1 + \sum_{j=1}^{n-1} d_j = \sum_{j=1}^{n-1} a^{j-1} = \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}.$$

(3)  $y_{n+1} = ay_n + (1-a)v_n$  と  $v_{n+1} - v_n = a^{-n}/(1-a)$  から

$$\{y_{n+2} - ay_{n+1}\} - \{y_{n+1} - ay_n\} = a^{-n}.$$

$z_n = y_{n+1} - ay_n$  と置く。初期条件より

$$z_1 = y_2 - ay_1 = 1 + (1-a)y_1 = \frac{1}{1-a}.$$

したがって

$$z_n = z_1 + \sum_{j=1}^{n-1} a^{-j} = \frac{a^{1-n}}{1-a}.$$

すなわち

$$y_{n+1} = ay_n + \frac{a^{1-n}}{1-a}. \quad (1)$$

ここで  $t_n = y_n/a^{n-1}$  と置き、(1) を  $a^n$  で割ると

$$t_{n+1} - t_n = \frac{a^{1-2n}}{1-a}.$$

$t_1 = y_1 = a/(1-a)^2$  だから、等比数列の和を用いて

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{1}{1-a} \sum_{j=1}^{n-1} a^{1-2j} \\ &= \frac{a^2}{(1-a)^2(a+1)} (1 + a^{1-2n}). \end{aligned}$$

最後に  $y_n = a^{n-1}t_n$  を戻して

$$y_n = \frac{a^2}{(a-1)^2(a+1)} (a^{n-1} + a^{-n})$$

を得る。

【総評】 点列のベクトル条件から漸化式を作る問題。目安時間は 25～32 分。 $P_{n+1} = aP_n + (1-a)Q_n$  と書き換え、 $Q_n$  を消去するのが入口である。特性方程式と非同次特解による主解法に対し、階差を 1 階漸化式へ落とす別解は計算の独立検算になる。公式講評では  $\overrightarrow{Q_n Q_{n+1}}$  の  $x$  成分が 0 であることを  $Q_n$  自体の  $x$  成分が 0 と誤読する答案や、等比和の計算ミスが指摘されている。ベクトルの意味と添字を各段階で確認する。

## 【第3問】

以下の問いに答えよ。

- (1) 連立不等式  $x \geq 2, 2^x \leq x^y \leq x^2$  の表す領域を  $xy$  平面上に図示せよ。ただし、自然対数の底  $e$  が  $2 < e < 3$  をみたすことを用いてよい。
- (2)  $a > 0$  に対して、連立不等式  $2 \leq x \leq 6, (x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geq 0$  の表す  $xy$  平面上の領域の面積を  $S(a)$  とする。 $S(a)$  を最小にする  $a$  の値を求めよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

$x \geq 2$  では  $x > 1$  なので、 $2^x \leq x^y \leq x^2$  は対数を取って  $\frac{x \log 2}{\log x} \leq y \leq 2$  に直せる。関数  $g(x) = \frac{x \log 2}{\log x}$  の増減を調べ、 $g(2) = g(4) = 2$  と  $2 < e < 3$  から図示範囲を決める。(2) は  $x^y$  が  $2^x$  と  $x^a$  の間にある条件なので、面積を

$$S(a) = \int_2^6 |a - g(x)| dx$$

と表し、水平線  $y = a$  を動かしたときの面積変化から最小の  $a$  を決める。

## 【解答】

(1)  $x \geq 2$  では  $x > 1$  であるから、 $x^y$  は  $y$  について単調増加である。よって  $2^x \leq x^y \leq x^2$  の対数を取ると  $x \log 2 \leq y \log x \leq 2 \log x$  となる。したがって  $\frac{x \log 2}{\log x} \leq y \leq 2$  である。 $g(x) = \frac{x \log 2}{\log x}$  とおく。微分すると  $g'(x) = \log 2 \cdot \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}$  である。したがって  $g(x)$  は  $0 < x < e$  で減少し、 $x > e$  で増加する。ここで  $2 < e < 3$  なので、 $x \geq 2$  では  $x = e$  で最小になる。

また  $g(2) = \frac{2 \log 2}{\log 2} = 2$ ,  $g(4) = \frac{4 \log 2}{\log 4} = 2$  である。 $g$  は  $e$  より右で増加するので、 $x > 4$  では  $g(x) > 2$  となる。したがって  $g(x) \leq 2$  となるのは  $2 \leq x \leq 4$  である。

よって求める領域は  $2 \leq x \leq 4$ ,  $\frac{x \log 2}{\log x} \leq y \leq 2$  である。図では、直線  $y = 2$  と曲線  $y = g(x)$  に挟まれた部分で、両端は  $(2, 2), (4, 2)$ 、曲線は  $x = e$  で最も低くなる。

(2)  $2 \leq x \leq 6$  では  $x > 1$  である。したがって  $(x^y - 2^x)(x^a - x^y) \geq 0$  は、 $x^y$  が  $2^x$  と  $x^a$  の間にあることを表す。対数を取ると、これは  $y$  が  $g(x) = \frac{x \log 2}{\log x}$  と  $a$  の間にあることと同値である。よって面積は

$$S(a) = \int_2^6 |a - g(x)| dx$$

である。

(1) で調べたように、 $g(x) \leq 2$  となるのは  $2 \leq x \leq 4$  であり、その長さは 2 である。また  $4 \leq x \leq 6$  では  $g(x) \geq 2$  であり、その長さも 2 である。 $a$  を少し増やすと、 $g(x) < a$  である部分の縦の距離は増え、 $g(x) > a$  である部分の縦の距離は減る。したがって  $S(a)$  が最小となるのは、 $g(x) < a$  となる  $x$  の長さ、 $g(x) > a$  となる  $x$  の長さが釣り合う位置である。 $a = 2$  のとき、 $g(x) \leq 2$  の部分と  $g(x) \geq 2$  の部分はどちらも長さ 2 である。さらに、 $a < 2$  では  $g(x) < a$  となる部分は  $(2, 4)$  の中の一部に限られるので長さは 2 より短く、 $S(a)$  は  $a$  を増やすと小さくなる。 $a > 2$  では  $g(x) < a$  となる部分の長さが 2 より長くなり、 $S(a)$  は  $a$  を増やすと大きくなる。

したがって  $S(a)$  を最小にする値は  $a = 2$  である。

## ▶ 別解（領域図と三角不等式による面積差の比較）

### 【方針】

(1) の曲線と直線を実際に図示する。(2) は中央値の一般論を使わず、 $S(a) - S(2)$  を長さ 2 の 2 区間に分け、逆三角不等式で直接非負と示す。

### 【解答】

(1)  $x \geq 2$  では  $x > 1$  なので、対数を取って

$$\frac{x \log 2}{\log x} \leq y \leq 2$$

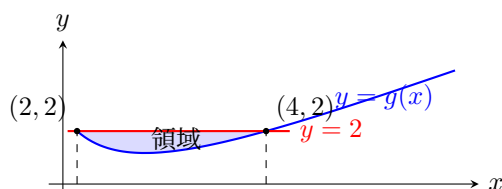
を得る。 $g(x) = x \log 2 / \log x$  と置けば

$$g'(x) = \log 2 \frac{\log x - 1}{(\log x)^2}.$$

よって  $g$  は  $x = e$  まで減少し、その後増加する。また  $g(2) = g(4) = 2$  だから、領域は

$$2 \leq x \leq 4, \quad g(x) \leq y \leq 2$$

である。



(2) 面積は

$$S(a) = \int_2^6 |a - g(x)| dx$$

である。(1) より

$$g(x) \leq 2 \quad (2 \leq x \leq 4), \quad g(x) \geq 2 \quad (4 \leq x \leq 6). \quad (1)$$

まず  $a > 2$  とする。 $[2, 4]$  では

$$|a - g(x)| - |2 - g(x)| = a - 2.$$

一方、 $[4, 6]$  では逆三角不等式から

$$|a - g(x)| - |2 - g(x)| \geq -(a - 2).$$

両区間の長さはともに 2 だから、積分して

$$S(a) - S(2) \geq 2(a - 2) - 2(a - 2) = 0.$$

$0 < a < 2$  のときは、(1) の 2 区間の役割を入れ替える。同様に

$$S(a) - S(2) \geq 2(2 - a) - 2(2 - a) = 0.$$

$a \neq 2$  なら、連続な曲線  $g$  が 2 と  $a$  の間に入る区間で逆三角不等式が真に厳しくなるため  $S(a) > S(2)$  である。したがって最小にする値は

$$a = 2$$

である。

**【総評】** 指数不等式を対数で領域に直し、面積を絶対値積分として読む問題。目安時間は 25～32 分。 $x > 1$  なので対数後も不等号の向きは変わらず、 $g'(x)$  の符号は  $x = e$  を境に変わる。面積最小化は水平線  $y = a$  との縦距離の総和であり、中央値の考え方と面積差の直接比較が独立な 2 解法になる。公式講評では  $\log 2 / \log x$  の誤変形や  $x < e$  で  $\log x < 0$  とする誤答が挙げられた。領域図を先に正確に描き、 $[2, 4]$  と  $[4, 6]$  が同じ長さであることを使う。

## 【第 4 問】

アルファベットの A と書かれた玉が 1 個, D と書かれた玉が 1 個, H と書かれた玉が 1 個, I と書かれた玉が 1 個, K と書かれた玉が 2 個, O と書かれた玉が 2 個ある。これら 8 個の玉を円形に並べる。

- (1) 時計回りに HOKKAIDO と並ぶ確率を求めよ。
- (2) 隣り合う子音が存在する確率を求めよ。ここで子音とは, D, H, K の 3 文字 (玉は 4 個) のことである。
- (3) 隣り合う子音が存在するとき, それが KK だけである条件付き確率を求めよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

同じ文字の玉がある円順列なので、全体数を  $\frac{7!}{2!2!}$  として数える。(1) は円形の読み始めを回転で同一視すると、時計回りに HOKKAIDO と並ぶ配置は 1 通りである。(2) は「隣り合う子音が存在しない」を補集合で数え、母音 4 個を円形に並べてできる 4 つのすき間に子音 4 個を 1 つずつ入れる。(3) は KK を 1 つのブロックとして扱い、D と H がどの子音とも隣り合わないよう、母音のすき間へブロック・D・H を別々に入れる。

## 【解答】

(1) 8 個の玉を円形に並べる総数は、K が 2 個、O が 2 個あることを考えて  $\frac{(8-1)!}{2!2!} = \frac{7!}{2!2!} = 1260$  通りである。

時計回りに HOKKAIDO と並ぶ円形配置は、回転を同一視すれば 1 通りである。したがって求める確率は  $\frac{1}{1260}$  である。

(2) 隣り合う子音が存在しない場合を数える。母音は A, I, O, O の 4 個であり、これらを円形に並べる方法は  $\frac{(4-1)!}{2!} = 3$  通りである。

この 4 個の母音の間には 4 つのすき間がある。子音 D, H, K, K が隣り合わないためには、この 4 つのすき間に子音を 1 個ずつ入れるしかない。その入れ方は  $\frac{4!}{2!} = 12$  通りである。よって、隣り合う子音が存在しない並べ方は  $3 \cdot 12 = 36$  通りである。

したがって、隣り合う子音が存在しない確率は  $\frac{36}{1260} = \frac{1}{35}$  であり、求める確率はその余事象なので  $1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$  である。

(3) 「隣り合う子音が存在するとき、それが KK だけである」とは、K と K は隣り合い、D と H はどの子音とも隣り合わない場合である。

KK を 1 つのブロックとみなす。まず母音 A, I, O, O を円形に並べる方法は、(2) と同じく 3 通りである。この母音 4 個の間の 4 つのすき間のうち、3 つを選んで、KK ブロック、D、H を 1 つずつ入れればよい。その方法は  ${}_4C_3 \cdot 3! = 24$  通りである。したがって、条件に合う並べ方は  $3 \cdot 24 = 72$  通りである。

(2) より、隣り合う子音が存在する並べ方は  $1260 - 36 = 1224$  通りである。よって求める条件付き確率は  $\frac{72}{1224} = \frac{1}{17}$  である。

## ▶ 別解（同文字の玉を区別して数える検算）

### 【方針】

2 個の K と 2 個の O を一時的に区別し、唯一の A の位置を固定して回転を除く。全事象を  $7!$  通りとし、最後までラベル付きで数えることで重複除去の割り忘れを避ける。

### 【解答】

2 個の K を  $K_1, K_2$ 、2 個の O を  $O_1, O_2$  と区別する。唯一の A を円の最上部に固定すれば、全配置は残り 7 個の順列  $7! = 5040$  通りである。

(1) 文字列 HOKKAIDO を作る円形配置は 1 種類であり、K と O のラベルの付け方がそれぞれ  $2!$  通りある。したがって有利なラベル付き配置は  $2!2! = 4$  通りで、確率は

$$\frac{4}{5040} = \frac{1}{1260}.$$

(2) 子音が隣り合わないなら、母音 4 個と子音 4 個は円周上で交互に並ぶ。A を固定した後、残る母音  $I, O_1, O_2$  の並べ方は  $3!$  通りで、その 4 つのすき間に子音  $D, H, K_1, K_2$  を置く方法は  $4!$  通りである。よって子音が隣り合わない配置は

$$3!4! = 144$$

通りである。したがって求める確率は

$$1 - \frac{144}{5040} = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}.$$

(3) KK だけが隣り合う配置を数える。まず A を固定し、残るラベル付き母音を円形の残り 3 位置へ置く方法は  $3!$  通り。4 つの母音間のすき間のうち、 $K_1K_2$  ブロックを置くすき間は 4 通り、ブロック内部の順序は 2 通りである。残り 3 すき間の異なる 2 つへ D, H を順に置く方法は  $3 \cdot 2$  通り。したがって有利な配置は

$$3! \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 288$$

通りである。

条件「隣り合う子音が存在する」を満たす配置は  $5040 - 144 = 4896$  通りだから、条件付き確率は

$$\frac{288}{4896} = \frac{1}{17}.$$

【総評】 重複を含む円順列と条件付き確率の問題。目安時間は 18～25 分。同じ文字のまま重複を割る主解法と、全玉を区別して最後まで数える別解で  $1/1260, 34/35, 1/17$  が一致する。(2) は「子音なし」の余事象を母音のすき間で数えるのが安定し、(3) は KK ブロックと D, H を別々のすき間へ置く。公式講評でも余事象を使わない答案は正答に至らず、単純な数え上げの説明不足が多かったとされる。標本空間と有利事象を同じラベル規則で数える。

## 【第 5 問】

複素数  $z$  に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし、 $\bar{z}$  を  $z$  と共役な複素数とし、 $i$  を虚数単位とする。

$$z\bar{z} = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad |z| = |z - \sqrt{3} + i| \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- (1) ①, ②それぞれの方程式について, その解  $z$  全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。  
 (2) ①, ②の共通解となる複素数をすべて求めよ。  
 (3) (2) で求めたすべての複素数の積を  $w$  とおく。このとき,  $w^n$  が負の実数となるための整数  $n$  の必要十分条件を求めよ。

## ▶ 解法 1

## 【方針】

$z = x + yi$  とおき,  $z\bar{z} = 4$  を原点中心半径 2 の円に,  $|z| = |z - \sqrt{3} + i|$  を 2 点  $(0, 0)$ ,  $(\sqrt{3}, -1)$  から等距離の直線に直す。共通解は円と直線の交点として求める。最後に 2 つの共通解の積  $w$  を極形式にし,  $w^n$  が負の実数となる偏角条件を 6 を法とする合同条件で表す。整数  $n$  は負の場合も含めて扱う。

## 【解答】

(1)  $z = x + yi$  とおく。すると  $z\bar{z} = x^2 + y^2$  であるから, 方程式 ① は  $x^2 + y^2 = 4$  を表す。これは複素数平面上で, 原点を中心とする半径 2 の円である。

次に,  $|z| = |z - \sqrt{3} + i|$  は, 点  $(0, 0)$  と点  $(\sqrt{3}, -1)$  からの距離が等しい点の集合である。式で整理すると  $x^2 + y^2 = (x - \sqrt{3})^2 + (y + 1)^2$  であり, 展開して  $\sqrt{3}x - y = 2$  を得る。したがって方程式 ② は, 線分  $(0, 0)(\sqrt{3}, -1)$  の垂直二等分線である直線  $\sqrt{3}x - y = 2$  を表す。

(2) 共通解は  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $\sqrt{3}x - y = 2$  の交点である。直線から  $y = \sqrt{3}x - 2$  である。これを円の式に代入すると  $x^2 + (\sqrt{3}x - 2)^2 = 4$  となり,  $4x^2 - 4\sqrt{3}x = 0$  すなわち  $4x(x - \sqrt{3}) = 0$  である。よって  $x = 0$ ,  $\sqrt{3}$  である。 $x = 0$  のとき  $y = -2$ ,  $x = \sqrt{3}$  のとき  $y = 1$  である。したがって共通解は  $-2i$ ,  $\sqrt{3} + i$  である。

別解。共通解は極形式で求めてもよい。① より  $z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$  とおける。このとき ② の直線条件  $\sqrt{3}x - y = 2$  は  $\sqrt{3} \cdot 2 \cos \theta - 2 \sin \theta = 2$  すなわち  $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = 1$  である。左辺は  $2 \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right)$  だから  $\cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$  となる。したがって  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $-\frac{\pi}{2}$  を得て, 共通解は  $\sqrt{3} + i$ ,  $-2i$  である。これは座標で求めた結果と一致する。

(3) (2) で求めたすべての複素数の積は  $w = (-2i)(\sqrt{3} + i) = 2 - 2\sqrt{3}i$  である。絶対値は  $|w| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$  であり, 偏角は  $-\frac{\pi}{3}$  ととれる。したがって

$$w = 4 \left( \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

である。

整数  $n$  に対して

$$w^n = 4^n \left( \cos \left( -\frac{n\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{n\pi}{3} \right) \right)$$

である。 $4^n$  は正の実数なので,  $w^n$  が負の実数となるための必要十分条件は  $-\frac{n\pi}{3} \equiv \pi \pmod{2\pi}$  である。これは  $-n \equiv 3 \pmod{6}$  すなわち  $n \equiv 3 \pmod{6}$  と同値である。

よって求める条件は  $n = 6q + 3$  ( $q \in \mathbb{Z}$ ) である。

## ▶ 別解（複素内積と 6 乗周期）

### 【方針】

等距離条件を絶対値の 2 乗で展開し、実部条件として扱う。円との交点は単位複素数の偏角で求め、最後は正規化した複素数の 6 乗周期から整数条件を読む。

### 【解答】

(1) 第 1 の方程式は

$$|z|^2 = z\bar{z} = 4$$

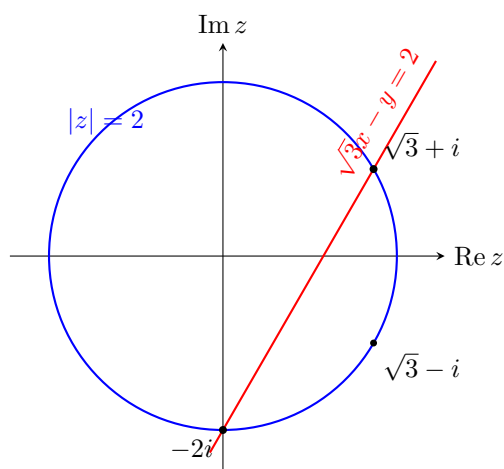
だから、原点中心・半径 2 の円を表す。第 2 の方程式で  $c = \sqrt{3} - i$  と置くと

$$|z|^2 = |z - c|^2 = |z|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{c}) + |c|^2.$$

$|c|^2 = 4$ 、 $\bar{c} = \sqrt{3} + i$  だから

$$\operatorname{Re}\{z(\sqrt{3} + i)\} = 2. \quad (1)$$

これは 0 と  $c$  の垂直二等分線であり、 $z = x + yi$  とすれば  $\sqrt{3}x - y = 2$  である。



(2)  $|z| = 2$  より  $z = 2u$ 、 $|u| = 1$  と置く。  $u = \cos \theta + i \sin \theta$  とすれば、(1) と

$$\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

から

$$2 \cos \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1.$$

したがって

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \quad -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

よって共通解は

$$z = \sqrt{3} + i, \quad z = -2i$$

である。

(3) 積は  $w = 2 - 2\sqrt{3}i$  である。正規化して

$$u = \frac{w}{4} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

と置く。直接計算すると

$$u^3 = -1, \quad u^6 = 1.$$

したがって整数  $n$  に対し  $u^n$  は  $n$  を 6 で割った余りだけで決まり、負の実数となるのは余りが 3 のときに限る。 $w^n = 4^n u^n$  で  $4^n > 0$  は負の整数  $n$  に対しても成り立つから、必要十分条件は

$$n \equiv 3 \pmod{6},$$

すなわち

$$n = 6q + 3 \quad (q \in \mathbb{Z})$$

である。

【総評】 複素数平面の図形解釈と整数条件を結ぶ問題。目安時間は 12～16 分。 $z\bar{z} = 4$  は円、等距離条件は垂直二等分線であり、座標計算と実部条件の 2 解法で交点を検算できる。(3) はド・モアブルの定理による偏角合同と、 $(w/4)^6 = 1$  の周期性が独立な説明になる。公式講評では交点座標の書き落とし、不正確な図、絶対値を  $n$  乗し忘れる誤答が指摘された。 $4^n > 0$  と「整数  $n$ 」を明示し、 $q \in \mathbb{Z}$  まで書く。