

北海道大学 2023 年度 文系

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

$P(x)$ を x についての整式とし、 $P(x)P(-x) = P(x^2)$ は x についての恒等式であるとする。

- (1) $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ であることを示せ。
- (2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないならば、 $P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れることを示せ。
- (3) 次数が 2 である $P(x)$ をすべて求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は恒等式に $x=0$ を代入して、 $P(0)$ が $t^2 = t$ を満たすことを見る。(2) は $x=1$ を代入し、 $P(1) \neq 0$ から割って $P(-1) = 1$ を得る。(3) は $P(x) = ax^2 + bx + c$ とおき、 $P(x)P(-x)$ では奇数次の項が消えることに注意して $x^4, x^2, 1$ の係数を比較する。最後に得た 4 候補が実際に次数 2 で恒等式を満たすことを確認する。

【解答】

(1) 恒等式 $P(x)P(-x) = P(x^2)$ に $x=0$ を代入すると $P(0)^2 = P(0)$ である。よって $P(0)\{P(0)-1\} = 0$ となるから、 $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ である。

(2) $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないということは、 $P(1) \neq 0$ を意味する。恒等式に $x=1$ を代入すると $P(1)P(-1) = P(1)$ である。 $P(1) \neq 0$ なので両辺を $P(1)$ で割ることができ、 $P(-1) = 1$ を得る。したがって $P(-1)-1 = 0$ であるから、因数定理より $P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れる。

(3) $P(x)$ の次数が 2 であるから $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) とおく。このとき $P(-x) = ax^2 - bx + c$ であり、 $P(x)P(-x) = (ax^2 + c)^2 - b^2x^2 = a^2x^4 + (2ac - b^2)x^2 + c^2$ である。一方、 $P(x^2) = ax^4 + bx^2 + c$ である。係数を比較すると $a^2 = a$, $2ac - b^2 = b$, $c^2 = c$ である。 $a \neq 0$ より $a = 1$ である。また $c^2 = c$ から $c = 0$ または $c = 1$ である。 $c = 0$ のとき、 $-b^2 = b$ より $b = 0, -1$ である。したがって $P(x) = x^2$, $P(x) = x^2 - x$ を得る。 $c = 1$ のとき、 $2 - b^2 = b$ すなわち $b^2 + b - 2 = 0$ より $b = 1, -2$ である。したがって $P(x) = x^2 + x + 1$, $P(x) = x^2 - 2x + 1$ を得る。

以上の 4 つはいずれも $a = 1 \neq 0$ で次数が 2 であり、上の係数条件を満たすので、実際に恒等式を満たす。よって求める整式は $P(x) = x^2$, $x^2 - x$, $x^2 + x + 1$, $(x-1)^2$ である。

▶ 別解 (偶数部分と奇数部分に分ける)

【方針】

整式を偶数部分と奇数部分に分け、恒等式の左辺を平方差として整理する。次数 2 の場合は定数項ごとに奇数部分の係数を決定する。

【解答】

(1) $x=0$ を代入すれば

$$P(0)^2 = P(0)$$

であるから、 $P(0) = 0$ または $P(0) = 1$ である。

(2) $x=1$ を代入すると

$$P(1)P(-1) = P(1)$$

を得る。 $P(x)$ が $x-1$ で割り切れないときは $P(1) \neq 0$ なので、 $P(-1) = 1$ である。因数定理により $P(x)-1$ は $x+1$ で割り切れる。

(3) P の偶数部分と奇数部分を

$$E(x) = \frac{P(x) + P(-x)}{2}, \quad O(x) = \frac{P(x) - P(-x)}{2}$$

とおく。次数が 2 であるから

$$E(x) = ax^2 + c, \quad O(x) = bx \quad (a \neq 0)$$

と書ける。恒等式は

$$E(x)^2 - O(x)^2 = P(x^2)$$

となる。最高次項だけを比べれば $a^2 = a$ であり、 $a = 1$ である。また (1) により $c = 0, 1$ である。

したがって

$$(x^2 + c)^2 - b^2 x^2 = x^4 + bx^2 + c$$

である。 $c = 0$ なら $-b^2 = b$ より $b = 0, -1$, $c = 1$ なら $2 - b^2 = b$ より $b = 1, -2$ である。よって

$$P(x) = x^2, x^2 - x, x^2 + x + 1, (x - 1)^2$$

を得る。いずれも上の平方差の式へ代入すれば恒等式を満たす。

【総評】 恒等式を特殊値代入と係数比較で絞る問題。目安時間は 12 分。(1)(2) は $x = 0, 1$ を入れるだけだが、(2) では $P(1) \neq 0$ だから割れる、という一文が必要である。(3) は $P(x)P(-x)$ の奇数次項が打ち消えるため、 $x^4, x^2, 1$ の 3 条件だけで決まる。最後に最高次係数 $a \neq 0$ と候補の確認を書けば、1 次以下の混入も防げる。直接係数比較と偶奇分離で 4 候補が一致した。直接係数比較と偶奇分離で 4 候補が一致した。直接係数比較と偶奇分離で 4 候補が一致した。

【第 2 問】

三角形 OAB は辺の長さが $OA = 3$, $OB = 5$, $AB = 7$ であるとする。また、 $\angle AOB$ の 2 等分線と直線 AB との交点を P とし、頂点 B における外角の 2 等分線と直線 OP との交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また、 $|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。また、 $|\overrightarrow{OQ}|$ の値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は角の二等分線定理から $AP : PB = 3 : 5$ とし、内分点公式で $\overrightarrow{OP}$ を出す。長さは余弦定理で $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ を求めてから計算する。(2) は頂点 B の外角二等分線の方角を、 BA 方向の単位ベクトルと BO 方向の単位ベクトルの差として作る。 Q が直線 OP とその外角二等分線上にあることを係数比較して $\overrightarrow{OQ}$ を決める。

【解答】

(1) P は $\angle AOB$ の二等分線と直線 AB の交点である。角の二等分線定理より $AP : PB = OA : OB = 3 : 5$ である。したがって内分点公式から

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{8}$$

である。

次に $|\overrightarrow{OP}|$ を求める。余弦定理より $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ であるから、 $49 = 9 + 25 - 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ となり、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\frac{15}{2}$ である。よって

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OP}|^2 &= \left| \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{8} \right|^2 \\ &= \frac{1}{64} \{ 25 \cdot 9 + 30 \left(-\frac{15}{2} \right) + 9 \cdot 25 \} = \frac{225}{64} \end{aligned}$$

である。したがって $|\overrightarrow{OP}| = \frac{15}{8}$ である。

(2) 頂点 B から見た BA 方向の単位ベクトルは

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{7}$$

であり、 BO 方向の単位ベクトルは $\frac{\overrightarrow{BO}}{|\overrightarrow{BO}|} = -\frac{\overrightarrow{OB}}{5}$ である。外角の二等分線の方角はこれらの差の方角であるから、

$$\frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} - \frac{\overrightarrow{BO}}{|\overrightarrow{BO}|} = \frac{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}}{7} + \frac{\overrightarrow{OB}}{5} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB}}{35}$$

に平行である。 Q は直線 OP 上にあるので、ある実数 λ を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \lambda \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{8}$$

と表せる。また、 Q は B を通る外角二等分線上にあるので、ある実数 μ を用いて

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \mu(5\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB})$$

とも表せる。 $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は平行でないから係数を比較できる。 $\overrightarrow{OA}$ の係数から $\frac{5\lambda}{8} = 5\mu$ すなわち $\mu = \lambda/8$ である。 $\overrightarrow{OB}$ の係数から $\frac{3\lambda}{8} = 1 + 2\mu$ であり、 $\mu = \lambda/8$ を代入すると $\frac{3\lambda}{8} = 1 + \frac{\lambda}{4}$ となる。よって $\lambda = 8$ である。

したがって $\overrightarrow{OQ} = 5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ である。これは $8\overrightarrow{OP}$ に等しいので、 $|\overrightarrow{OQ}| = 8|\overrightarrow{OP}| = 8 \cdot \frac{15}{8} = 15$ である。

▶ 別解 (内角・外角の二等分線定理)

【方針】

まず内角二等分線定理で P を求める。次に三角形 OBP の頂点 B に外角二等分線定理を用い、直線 OP 上の比から Q を決める。

【解答】

(1) 角の二等分線定理より

$$AP : PB = OA : OB = 3 : 5.$$

したがって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{8}.$$

また余弦定理から

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2} = -\frac{15}{2}.$$

よって

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{25 \cdot 9 + 30(-15/2) + 9 \cdot 25}{64} = \frac{225}{64},$$

すなわち

$$|\overrightarrow{OP}| = \frac{15}{8}.$$

(2) 上の比から

$$PB = \frac{5}{8}AB = \frac{35}{8}.$$

点 P は辺 BA 上にあるので、問題の直線 BQ は三角形 OBP の頂点 B における外角の二等分線でもある。外角二等分線定理より

$$OQ : QP = BO : BP = 5 : \frac{35}{8} = 8 : 7.$$

ここで $BO \neq BP$ だから Q は直線 OP 上で P の外側にあり、 $OQ - QP = OP$ である。したがって

$$OQ = 8OP = 15.$$

向きも同じなので

$$\overrightarrow{OQ} = 8\overrightarrow{OP} = 5\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}, \quad |\overrightarrow{OQ}| = 15.$$

【総評】 角の二等分線定理とベクトルの係数比較を組み合わせる図形問題。目安時間は 16 分。(1) は内分点公式だけでなく、 $|\overrightarrow{OP}|$ の計算に必要な内積を余弦定理で出すところまで整理する。(2) の山場は外角二等分線の方向で、内角の方向と符号が逆になるため、単位ベクトルの差として作ると安全である。 Q が直線 OP 上と外角二等分線上の両方にあることを 2 通りに表し、係数比較で交点を決める。単位ベクトル法と外角二等分線定理で $OQ = 15$ まで一致した。単位ベクトル法と外角二等分線定理で $OQ = 15$ まで一致した。単位ベクトル法と外角二等分線定理で $OQ = 15$ まで一致した。

【第 3 問】

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし、

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく。また K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

- (1) $K_2 = 5$ となる確率を求めよ。
- (2) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ。
- (3) q_n を求めよ。また $K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

K_n は数直線上で 1 から始まり、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ を通って 6 に至る折れ線の長さである。三角不等式から最小値は少なくとも 5 で、等号は途中で逆戻りしないとき、すなわち非減少列のときに限られる。(1)(2) はその等号条件を使い、重複を許す組合せとして非減少列の個数を数える。

【解答】

(1) K_2 は、数直線上で $1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow 6$ と進むときの移動距離の合計である。 $1 \leq a_1, a_2 \leq 6$ だから、この合計が最短の 5 になるのは、途中で左へ戻らない場合、すなわち $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq 6$ のときである。

このような (a_1, a_2) は、1 から 6 までの 6 種類から重複を許して 2 個を非減少に選ぶことと同じである。したがって個数は ${}_{6+2-1}C_2 = {}_7C_2 = 21$ である。全事象は 6^2 通りなので、求める確率は $\frac{21}{6^2} = \frac{7}{12}$ である。

(2) 同様に、 $K_3 = 5$ となるのは $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 6$ のときである。このような列は、6 種類から重複を許して 3 個を非減少に選ぶ個数に等しいから ${}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = 56$ 通りである。全事象は 6^3 通りなので、確率は $\frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}$ である。

(3) 三角不等式を繰り返し用いると $K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6| \geq |1 - 6| = 5$ である。したがって $q_n \geq 5$ である。

一方、たとえば $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ とすれば $K_n = 5$ となるので、 $q_n = 5$ である。

等号が成り立つ条件を考える。数直線上で 1 から 6 へ進む移動距離の合計が直線距離 5 に等しいためには、途中で逆向きに進まないことが必要十分である。つまり $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 6$ である。よって $K_n = q_n$ となるための必要十分条件は上の非減少条件である。

▶ 別解 (上昇量と下降量で数える)

【方針】

数直線上の各移動を右向きと左向きに分ける。右向き総量と左向き総量の差は常に 5 なので、総移動距離は $5 + 2 \times$ 左向き総量となる。

【解答】

数列の両端に $a_0 = 1, a_{n+1} = 6$ を加える。各移動の右向き総量を U 、左向き総量を D とすると、始点と終点の差から

$$U - D = 6 - 1 = 5$$

であり、移動距離の総和は

$$K_n = U + D = 5 + 2D \quad (*)$$

となる。

(1) $K_2 = 5$ は (*) により $D = 0$ 、すなわち $a_1 \leq a_2$ と同値である。各目 j の出現回数を m_j とすれば、非減少列は

$$m_1 + m_2 + \dots + m_6 = 2, \quad m_j \geq 0$$

の解と一対一に対応する。その個数は

$${}_7C_5 = 21$$

なので、確率は

$$\frac{21}{6^2} = \frac{7}{12}.$$

(2) 同様に $K_3 = 5$ となる非減少列の個数は

$$m_1 + \cdots + m_6 = 3$$

の非負整数解の個数

$${}_8C_5 = 56$$

である。したがって確率は

$$\frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}.$$

(3) (*) より常に $K_n \geq 5$ であり, 等号は $D = 0$ のときに限る。よって

$$q_n = 5.$$

また $D = 0$ は一度も左へ戻らないことから, 必要十分条件は

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq 6$$

である。

【総評】 絶対値和を数直線上の移動距離として読む確率問題。目安時間は 12 分。 K_n の最小値は式を展開するより, 三角不等式の等号条件で考えると一気に見える。確率計算では, 非減少列を「重複を許して選ぶ」問題に変換し, ${}_7C_2, {}_8C_3$ を使う。等号条件は単なる十分条件ではなく, 逆戻りがないことが必要でもある点を言葉で補うとよい。三角不等式と下降量の 2 通りで最小値 5 と非減少条件が一致した。三角不等式と下降量の 2 通りで最小値 5 と非減少条件が一致した。三角不等式と下降量の 2 通りで最小値 5 と非減少条件が一致した。

【第 4 問】

q を実数とする。座標平面上に円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $P: y = x^2 + q$ がある。

- (1) C と P に同じ点で接する傾き正の直線が存在するとき, q の値およびその接点の座標を求めよ。
- (2) (1) で求めた q の値を q_1 , 接点の y 座標を y_1 とするとき, 連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1 \\ y \geq x^2 + q_1 \\ y \leq y_1 \end{cases}$$

の表す領域の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は共通接点を (x, y) とし, 円の接線の傾き $-x/y$ と放物線の接線の傾き $2x$ を一致させる。傾き正より $x > 0$ と分かるので, $y = -1/2$, $x = \sqrt{3}/2$ が選ばれる。(2) は不等式の向きを確認し, 水平線 $y = \text{一定}$ で切る。 $-1 \leq y \leq -1/2$ で, 円の外側かつ放物線の上側となる左右 2 つの幅を積分する。円部分の積分は扇形と三角形の面積で処理する。

【解答】

(1) 共通接点を (x, y) とする。円の接線の傾きは $-x/y$, 放物線の接線の傾きは $2x$ である。傾きが正なので $x \neq 0$ であり,

$$2x = -\frac{x}{y}$$

から $y = -1/2$ を得る。円上にあることと傾きが正であることから

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

放物線の式へ代入して

$$q = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}.$$

よって接点は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

である。

(2) 領域を水平に切る。 $-5/4 \leq y \leq -1$ では円の外側という条件は自動的に満たされ、横幅は

$$2\sqrt{y + \frac{5}{4}}.$$

$-1 \leq y \leq -1/2$ では、放物線の内側から円の内側を除くので横幅は

$$2\left(\sqrt{y + \frac{5}{4}} - \sqrt{1 - y^2}\right).$$

したがって面積 S は

$$S = 2 \int_{-5/4}^{-1} \sqrt{y + \frac{5}{4}} dy + 2 \int_{-1}^{-1/2} \left(\sqrt{y + \frac{5}{4}} - \sqrt{1 - y^2}\right) dy.$$

第1項は $1/6$ である。また

$$2 \int_{-1}^{-1/2} \sqrt{y + \frac{5}{4}} dy = \frac{3\sqrt{3} - 1}{6},$$

$$2 \int_{-1}^{-1/2} \sqrt{1 - y^2} dy = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

以上を合わせて

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}.$$

なお、 $-5/4 \leq y < -1$ の部分を落とすと面積が $1/6$ 小さくなるので注意する。

▶ 別解（共通接線の方程式と縦方向の積分）

【方針】

共通接線を $y = mx + n$ と置き、円への距離条件と両曲線の接点一致条件から m, n, q を決める。面積は縦に切ると一つの積分で表せる。

【解答】

(1) 共通接線を $y = mx + n$ とおく。傾きが正だから $m > 0$ である。放物線との接点の x 座標は、接線の傾きから

$$2x = m, \quad x = \frac{m}{2}.$$

一方、直線を $mx - y + n = 0$ と書くと、円との接点は原点からこの直線へ下ろした垂線の足だから

$$\left(-\frac{mn}{m^2 + 1}, \frac{n}{m^2 + 1}\right)$$

である。二つの接点の x 座標が一致し、 $m > 0$ なので

$$\frac{m}{2} = -\frac{mn}{m^2 + 1}, \quad n = -\frac{m^2 + 1}{2}. \quad (1)$$

また直線が単位円に接する条件は

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1.$$

(1) より $n < 0$ だから、これを代入すると $m^2 + 1 = 4$ となる。よって

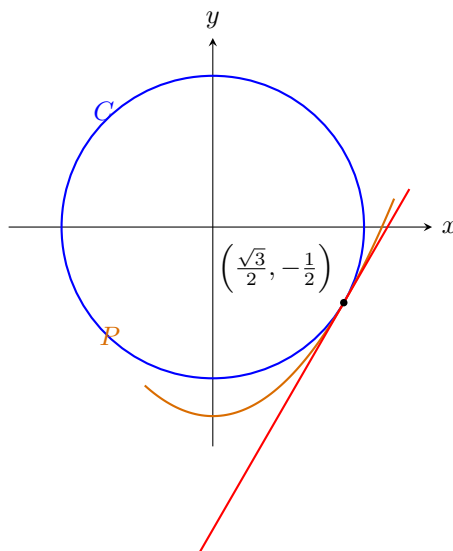
$$m = \sqrt{3}, \quad n = -2.$$

接点は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

であり、放物線の式へ代入して

$$q = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}.$$



(2) $y \leq -1/2$ かつ $y \geq x^2 - 5/4$ より

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

この範囲では、円の外側にある下側の部分は

$$y \leq -\sqrt{1-x^2}$$

である。したがって面積 S は

$$S = \int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left\{ -\sqrt{1-x^2} - \left(x^2 - \frac{5}{4} \right) \right\} dx.$$

多項式部分は

$$\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \left(\frac{5}{4} - x^2 \right) dx = \sqrt{3}.$$

また

$$\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}$$

は、中心角 $2\pi/3$ の扇形と二つの直角三角形からも得られる。よって

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}.$$

【総評】 共通接線条件からパラメータを決め、その後に領域面積を読む問題。目安時間は 22 分。(1) では傾き正から $x > 0$ を選ぶ点が多岐である。(2) は $x^2 + y^2 \geq 1$ が円の外側、 $y \geq x^2 - 5/4$ が放物線の上側を表すので、水平切片では内側の円をくり抜く形になる。積分の端点、左右対称の 2 倍、円部分を扇形から三角形を引いて求める処理が得点源である。水平切片と垂直切片の 2 積分で面積が一致した。水平切片と垂直切片の 2 積分で面積が一致した。水平切片と垂直切片の 2 積分で面積が一致した。