

入 学 試 験 問 題



数 学

北 海 道 大 学 2023 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

複素数平面上における図形 $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。
ただし、 i は虚数単位とする。

(A) C_1 は原点 O を中心とする半径 2 の円である。

(B) 自然数 n に対して、 z が C_n 上を動くとき $2w = z + 1 + i$ で定まる w の描く図形が C_{n+1} である。

(1) すべての自然数 n に対して、 C_n は円であることを示し、その中心を表す複素数 α_n と半径 r_n を求めよ。

(2) C_n 上の点と O との距離の最小値を d_n とする。このとき、 d_n を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ を求めよ。

第 2 問

O を原点とする座標空間において、3 点 $A(4, 2, 1)$, $B(1, -4, 1)$, $C(2, 2, -1)$ を通る平面を α とおく。また、球面 S は半径が 9 で、 S と α の交わりは A を中心とし B を通る円であるとする。ただし、 S の中心 P の z 座標は正とする。

- (1) 線分 AP の長さを求めよ。
- (2) P の座標を求めよ。
- (3) S と直線 OC は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。

第 3 問

以下の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底を表す。

- (1) k を実数の定数とし、 $f(x) = xe^{-x}$ とおく。方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ を用いてもよい。
- (2) $xye^{-(x+y)} = c$ をみたす正の実数 x, y の組がただ 1 つ存在するときの実数 c の値を求めよ。
- (3) $xye^{-(x+y)} = \frac{3}{e^4}$ をみたす正の実数 x, y を考えるとき、 y のとりうる値の最大値とそのときの x の値を求めよ。

第 4 問

n を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に $a_1, a_2, \dots, a_n$ とし、

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく。また、 K_n のとりうる値の最小値を q_n とする。

- (1) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ。
- (2) q_n を求めよ。また、 $K_n = q_n$ となるための $a_1, a_2, \dots, a_n$ に関する必要十分条件を求めよ。
- (3) n を 4 以上の自然数とする。 $L_n = K_n + |a_4 - 4|$ とおき、 L_n のとりうる値の最小値を r_n とする。 $L_n = r_n$ となる確率 p_n を求めよ。

第 5 問

a, b を $a^2 + b^2 < 1$ をみたす正の実数とする。また、座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし、 C の内部にある 2 点 $A(a, 0)$, $B(0, b)$ を考える。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ を考え、 P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく。

- (1) $f(\theta) = ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta$ とおく。方程式 $f(\theta) = 0$ の解が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。
- (2) D の座標を b, θ を用いて表せ。
- (3) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、3 点 A, P, D が同一直線上にあるような θ は少なくとも 1 つ存在することを示せ。また、このような θ はただ 1 つであることを示せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)