

## 北海道大学 2023 年度 理系

## 解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

## 【第 1 問】

複素数平面上における図形  $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$  は次の条件 (A) と (B) をみたすとする。ただし、 $i$  は虚数単位とする。

(A)  $C_1$  は原点  $O$  を中心とする半径 2 の円である。

(B) 自然数  $n$  に対して、 $z$  が  $C_n$  上を動くとき  $2w = z + 1 + i$  で定まる  $w$  の描く図形が  $C_{n+1}$  である。

(1) すべての自然数  $n$  に対して、 $C_n$  は円であることを示し、その中心を表す複素数  $\alpha_n$  と半径  $r_n$  を求めよ。

(2)  $C_n$  上の点と  $O$  との距離の最小値を  $d_n$  とする。このとき、 $d_n$  を求めよ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$  を求めよ。

## ▶ 解法 1 (標準解法)

## 【方針】

写像  $w = (z + 1 + i)/2$  は、複素数平面上で中心を  $(1 + i)/2$  だけずらしながら倍率  $1/2$  に縮小する相似変換である。したがって円は円に移り、中心と半径は  $\alpha_{n+1} = (\alpha_n + 1 + i)/2$ ,  $r_{n+1} = r_n/2$  を満たす。中心は固定点  $1 + i$  へ近づく等比型として解く。(2) は原点が円の内部または周上にあるかを比べ、 $d_n = \max\{0, |\alpha_n| - r_n\}$  とする。

## 【解答】

(1) 条件 (B) より  $w = \frac{z + 1 + i}{2}$  である。この対応は、すべての点を倍率  $1/2$  で縮小し、さらに平行移動する相似変換である。したがって円は円に移る。 $C_n$  の中心を表す複素数を  $\alpha_n$ 、半径を  $r_n$  とする。 $z$  が中心  $\alpha_n$ 、半径  $r_n$  の円上を動くとき、 $w$  の中心と半径は  $\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + 1 + i}{2}$ ,  $r_{n+1} = \frac{r_n}{2}$  である。初期条件は  $\alpha_1 = 0$ ,  $r_1 = 2$  である。

まず半径は  $r_n = \frac{2}{2^{n-1}}$  である。中心については、固定点  $1 + i$  を用いて  $\alpha_{n+1} - (1 + i) = \frac{1}{2}\{\alpha_n - (1 + i)\}$  と書ける。よって

$$\alpha_n - (1 + i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (\alpha_1 - (1 + i)) = -\frac{1 + i}{2^{n-1}}$$

である。したがって  $\alpha_n = (1 + i)\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$  である。

(2) 中心が  $\alpha_n$ 、半径が  $r_n$  の円上の点と原点との距離の最小値は、原点が円の内部または周上にあるとき 0、外部にあるとき  $|\alpha_n| - r_n$  である。したがって  $d_n = \max\{0, |\alpha_n| - r_n\}$  である。

ここで

$$|\alpha_n| = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right), \quad r_n = \frac{2}{2^{n-1}}$$

である。 $n = 1$  では明らかに原点は円の中心であり、 $d_1 = 0$  である。 $n = 2$  では  $|\alpha_2| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 = r_2$  なので  $d_2 = 0$  である。 $n \geq 3$  では

$$|\alpha_n| - r_n = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2}{2^{n-1}} > 0$$

であるから、

$$d_n = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2}{2^{n-1}} \quad (n \geq 3)$$

となる。よって

$$d_1 = d_2 = 0, \quad d_n = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2}{2^{n-1}} \quad (n \geq 3)$$

である。 $n \rightarrow \infty$  とすると  $2^{-(n-1)} \rightarrow 0$  なので  $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \sqrt{2}$  である。

## ▶ 別解（相似変換を直接反復する）

## 【方針】

写像  $T(z) = (z + 1 + i)/2$  の固定点を求め、 $T^{n-1}$  を直接計算する。円全体への作用が一式で分かる。

## 【解答】

(1) 写像

$$T(z) = \frac{z + 1 + i}{2}$$

の固定点は  $1 + i$  である。したがって

$$T(z) - (1 + i) = \frac{1}{2}\{z - (1 + i)\}$$

であり、反復すると

$$T^{n-1}(z) = (1 + i) + \frac{z - (1 + i)}{2^{n-1}}. \quad (1)$$

$C_1$  上では  $|z| = 2$  である。(1) は中心を

$$\alpha_n = (1 + i) \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

へ移し、中心からのベクトルを  $2^{-(n-1)}$  倍する。よって  $C_n$  は円であり、

$$\alpha_n = (1 + i) \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right), \quad r_n = \frac{2}{2^{n-1}}.$$

(2) 原点から中心までの距離は

$$|\alpha_n| = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

円が原点を含む場合の最小距離は 0, 含まない場合は中心距離から半径を引いた値なので

$$d_n = \max \left\{ 0, \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2}{2^{n-1}} \right\}.$$

括弧内は  $n = 1, 2$  で負,  $n \geq 3$  で正である。したがって

$$d_1 = d_2 = 0, \quad d_n = \sqrt{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{2}{2^{n-1}} \quad (n \geq 3).$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \sqrt{2}.$$

【総評】 複素数平面の相似変換と等比数列を合わせる問題。目安時間は 16 分。円の全点を直接追うのではなく、中心と半径だけを更新するのが核心である。中心の漸化式は固定点  $1 + i$  との差を取るとすぐ解ける。(2) では原点から円までの最短距離が常に  $|\alpha_n| - r_n$  とは限らず、原点が円の内部にある  $n = 1, 2$  では 0 になる点に注意する。漸化式と相似変換の反復で中心・半径・極限が一致した。漸化式と相似変換の反復で中心・半径・極限が一致した。漸化式と相似変換の反復で中心・半径・極限が一致した。

## 【第 2 問】

$O$  を原点とする座標空間において、3 点  $A(4, 2, 1)$ ,  $B(1, -4, 1)$ ,  $C(2, 2, -1)$  を通る平面を  $\alpha$  とおく。また、球面  $S$  は半径が 9 で、 $S$  と  $\alpha$  の交わりは  $A$  を中心とし  $B$  を通る円であるとする。ただし、 $S$  の中心  $P$  の  $z$  座標は正とする。

- (1) 線分  $AP$  の長さを求めよ。
- (2)  $P$  の座標を求めよ。
- (3)  $S$  と直線  $OC$  は 2 点で交わる。その 2 点間の距離を求めよ。

## ▶ 解法 1 (標準解法)

## 【方針】

切断円の中心が  $A$  であることから、球の中心  $P$  は平面  $\alpha$  に垂直で  $A$  を通る直線上にある。(1) は球の半径 9、切断円の半径  $AB$  から直角三角形で  $AP$  を求める。(2) は平面に垂直な方向ベクトルを  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  の両方と内積 0 になるように決め、 $z$  座標が正の方を選ぶ。(3) は中心から直線  $OC$  までの距離を使って弦長を出す。別解として、直線上の点を球面方程式へ直接代入して 2 交点のパラメータ差から弦長を求める。

## 【解答】

(1)  $S$  と平面  $\alpha$  の交わりは、中心  $A$ ,  $B$  を通る円である。したがってこの切断円の半径は  $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (-4-2)^2 + (1-1)^2} = 3\sqrt{5}$  である。

球の中心  $P$  から平面  $\alpha$  に下ろした垂線の足は、切断円の中心  $A$  である。よって、球の半径 9、切断円の半径  $3\sqrt{5}$ 、距離  $AP$  は直角三角形を作り、 $AP^2 + (3\sqrt{5})^2 = 9^2$  である。したがって  $AP^2 = 81 - 45 = 36$  より  $AP = 6$  である。

(2)  $\overrightarrow{AB} = (-3, -6, 0)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-2, 0, -2)$  である。平面  $\alpha$  に垂直なベクトルを  $(u, v, w)$  とおくと、 $-3u - 6v = 0$ ,  $-2u - 2w = 0$  を満たす。よって  $u = -2v$ ,  $w = -u$  である。たとえば  $v = -1$  とすれば  $(u, v, w) = (2, -1, -2)$  を得る。この長さは 3 である。 $AP = 6$  であるから  $\overrightarrow{AP} = \pm 2(2, -1, -2) = \pm(4, -2, -4)$  である。したがって  $P$  の候補は  $A + (4, -2, -4) = (8, 0, -3)$  または  $A - (4, -2, -4) = (0, 4, 5)$  である。 $P$  の  $z$  座標は正なので  $P = (0, 4, 5)$  である。

(3) 直線  $OC$  上の点は  $tC = (2t, 2t, -t)$  と表せる。中心  $P = (0, 4, 5)$  から直線  $OC$  までの距離を  $h$  とする。 $|C|^2 = 2^2 + 2^2 + (-1)^2 = 9$ ,  $P \cdot C = 3$ ,  $|P|^2 = 41$  であるから、射影を用いて  $h^2 = |P|^2 - \frac{(P \cdot C)^2}{|C|^2} = 41 - \frac{9}{9} = 40$  である。

球の半径は 9 なので、直線  $OC$  が球面と交わってできる弦の半分の長さは  $\sqrt{9^2 - h^2} = \sqrt{81 - 40} = \sqrt{41}$  である。したがって 2 点間の距離は  $2\sqrt{41}$  である。

## ▶ 別解 (平面の方程式と球面への直接代入)

## 【方針】

平面の方程式を先に求め、その法線上で球の中心を決定する。直線と球の二交点間距離は、パラメータの二次方程式の根の差から求める。

## 【解答】

(1) 切断円の半径は

$$AB = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = 3\sqrt{5}.$$

球の中心から切断面へ下ろした垂線の足が切断円の中心  $A$  であるから

$$AP^2 + AB^2 = 9^2.$$

よって

$$AP = 6.$$

(2)

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -6, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, -2)$$

の両方に垂直なベクトルとして  $(2, -1, -2)$  を取る。したがって平面  $\alpha$  は

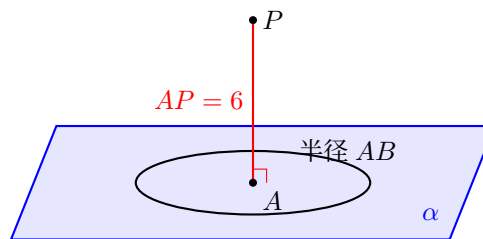
$$2x - y - 2z - 4 = 0$$

であり、その法線上にある  $P$  は

$$P = A + t(2, -1, -2)$$

と書ける。法線ベクトルの長さは 3 だから  $AP = 3|t| = 6$ ，すなわち  $t = \pm 2$  である。 $z$  座標が正となる  $t = -2$  を選んで

$$P = (0, 4, 5).$$



(3) 直線  $OC$  上の点を

$$(x, y, z) = (2t, 2t, -t)$$

とおき，中心  $P = (0, 4, 5)$ ，半径 9 の球面へ代入する。

$$(2t)^2 + (2t - 4)^2 + (-t - 5)^2 = 81$$

より

$$9t^2 - 6t - 40 = 0.$$

二つの解を  $t_1, t_2$  とすると，判別式を用いて

$$|t_1 - t_2| = \frac{\sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (-40)}}{9} = \frac{2\sqrt{41}}{3}.$$

パラメータが 1 変わると直線上の距離は

$$|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$$

だけ変わる。したがって二交点間の距離は

$$3|t_1 - t_2| = 2\sqrt{41}.$$

**【総評】** 球の切断円と空間ベクトルを組み合わせる問題。目安時間は 18 分。切断円の中心が  $A$  であることから， $AP$  が平面に垂直であると読めるかが最初の要点である。法線方向は外積を使わなくても， $AB$ ， $AC$  との内積がともに 0 になる成分条件で求められる。弦長は中心から直線までの距離で出す方法が短いが，直線を球面に代入する別解も計算確認として有効である。距離公式と二次方程式の根の差で弦長  $2\sqrt{41}$  が一致した。距離公式と二次方程式の根の差で弦長  $2\sqrt{41}$  が一致した。距離公式と二次方程式の根の差で弦長  $2\sqrt{41}$  が一致した。

【第 3 問】

以下の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底を表す。

- (1)  $k$  を実数の定数とし、 $f(x) = xe^{-x}$  とおく。方程式  $f(x) = k$  の異なる実数解の個数を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  を用いてもよい。
- (2)  $xye^{-(x+y)} = c$  をみたす正の実数  $x, y$  の組がただ 1 つ存在するときの実数  $c$  の値を求めよ。
- (3)  $xye^{-(x+y)} = \frac{3}{e^4}$  をみたす正の実数  $x, y$  を考えるとき、 $y$  のとりうる値の最大値とそのときの  $x$  の値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

(1) は  $f(x) = xe^{-x}$  の増減を調べ、 $x = 1$  で最大値  $1/e$  をとること、 $x = 0$  で 0 になること、 $x \rightarrow \infty$  で 0 に近づくことを使って解の個数を分類する。(2) は  $xye^{-(x+y)} = (xe^{-x})(ye^{-y})$  と分け、正の範囲で各因子が最大  $1/e$  を一意にとることから、ただ 1 組になるのは最大積の場合だけと見る。(3) は  $y$  を固定し、 $x$  が存在する条件を  $xe^{-x} \leq 1/e$  で判定し、 $ye^{-y} \geq 3/e^3$  から最大の  $y$  を求める。

【解答】

(1)  $f(x) = xe^{-x}$  とする。微分すると  $f'(x) = e^{-x}(1-x)$  である。 $e^{-x} > 0$  だから、 $f(x)$  は  $x < 1$  で増加し、 $x > 1$  で減少する。また  $f(1) = \frac{1}{e}$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  である。さらに  $x < 0$  では  $f(x) < 0$  であり、 $x \rightarrow -\infty$  では  $f(x) \rightarrow -\infty$  である。

以上より、方程式  $f(x) = k$  の異なる実数解の個数は

|               |   |
|---------------|---|
| $k < 0$       | 1 |
| $k = 0$       | 1 |
| $0 < k < 1/e$ | 2 |
| $k = 1/e$     | 1 |
| $k > 1/e$     | 0 |

である。

(2) 正の実数  $t$  に対して、(1) より  $te^{-t} \leq \frac{1}{e}$  であり、等号は  $t = 1$  のときだけ成り立つ。したがって正の  $x, y$  について  $xye^{-(x+y)} = (xe^{-x})(ye^{-y}) \leq \frac{1}{e^2}$  であり、等号は  $x = 1$ ,  $y = 1$  のときだけ成り立つ。

よって、ただ 1 つの組だけが存在するのは最大値をとる場合であり、 $c = \frac{1}{e^2}$  である。このとき実際に解は  $(x, y) = (1, 1)$  の 1 組だけである。

(3) 条件は  $(xe^{-x})(ye^{-y}) = \frac{3}{e^4}$  である。 $y$  を正の実数として固定する。正の  $x$  が存在するためには、 $xe^{-x}$  の最大値が  $1/e$  であることから  $\frac{3/e^4}{ye^{-y}} \leq \frac{1}{e}$  が必要十分である。すなわち  $ye^{-y} \geq \frac{3}{e^3}$  である。

正の範囲で  $g(y) = ye^{-y}$  は  $0 < y < 1$  で増加し、 $y > 1$  で減少する。また  $g(3) = \frac{3}{e^3}$  である。したがって  $g(y) \geq 3/e^3$  を満たす正の  $y$  の最大値は  $y = 3$  である。

このとき  $xe^{-x} = \frac{3/e^4}{3/e^3} = \frac{1}{e}$  であるから、(1) の等号条件より  $x = 1$  である。よって  $y$  の最大値は 3、そのときの  $x$  は 1 である。

## ▶ 別解 (対数を取った関数と基本不等式)

## 【方針】

正の範囲では  $\log(xe^{-x}) = \log x - x$  の増減を調べる。最大値と等号条件は基本不等式  $\log t \leq t - 1$  でも確認する。

## 【解答】

(1)  $x \leq 0$  では

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x) > 0$$

であり、 $f$  の値域は  $(-\infty, 0]$  である。したがって  $k < 0$  では解が 1 個、 $k = 0$  では  $x = 0$  の 1 個である。

$x > 0$  では  $f(x) > 0$  なので対数を取り、

$$g(x) = \log f(x) = \log x - x$$

とおく。すると

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1$$

だから、 $f$  は  $0 < x < 1$  で増加し、 $x > 1$  で減少する。最大値は  $f(1) = 1/e$ 、両端での極限は 0 である。よって異なる実数解の個数は

| $k$ | $k < 0$ | $k = 0$ | $0 < k < 1/e$ | $k = 1/e$ | $k > 1/e$ |
|-----|---------|---------|---------------|-----------|-----------|
| 個数  | 1       | 1       | 2             | 1         | 0         |

となる。

(2) 正の実数  $t$  に対する基本不等式

$$\log t \leq t - 1$$

から

$$te^{-t} \leq e^{-1}$$

であり、等号は  $t = 1$  のときに限る。したがって

$$xye^{-(x+y)} = (xe^{-x})(ye^{-y}) \leq e^{-2},$$

等号は  $(x, y) = (1, 1)$  のときだけ成り立つ。

$0 < c < e^{-2}$  なら、 $te^{-t} = \sqrt{c}$  は (1) により異なる二つの正の解をもち、少なくとも二つの対角解  $(t, t)$  が生じる。 $c \leq 0$  または  $c > e^{-2}$  では正の解はない。ゆえに解がただ 1 組存在するのは

$$c = e^{-2}$$

のときである。

(3)  $xe^{-x} \leq e^{-1}$  より、条件を満たすためには

$$ye^{-y} = \frac{3e^{-4}}{xe^{-x}} \geq 3e^{-3}. \quad (1)$$

関数  $ye^{-y}$  は  $y > 1$  で狭義に減少し、 $y = 3$  で  $3e^{-3}$  となる。したがって (1) から  $y \leq 3$  であり、最大値は 3 である。

$y = 3$  のとき条件は  $xe^{-x} = e^{-1}$  となるので、等号条件から  $x = 1$  である。よって

$$y_{\max} = 3, \quad x = 1.$$

【総評】  $xe^{-x}$  の増減表を 3 問すべてに使い回す関数問題。目安時間は 18 分。(1) では負の  $k$ 、 $k = 0$ 、正の  $k$  を区別し、 $x \rightarrow \infty$  の極限が 0 でも 0 には戻らないことを確認する。(2) は積の最大値と等号条件の一意性がポイントである。(3) は  $y$  を固定して  $x$  の存在条件に変換すると見通しがよく、最大の  $y$  は  $ye^{-y}$  の減少側で  $3/e^3$  になる点として決まる。増減表と基本不等式で  $c = e^{-2}$  および  $(x, y) = (1, 3)$  が一致した。増減表と基本不等式で  $c = e^{-2}$  および  $(x, y) = (1, 3)$  が一致した。増減表と基本不等式で  $c = e^{-2}$  および  $(x, y) = (1, 3)$  が一致した。

## 【第 4 問】

$n$  を 2 以上の自然数とする。1 個のさいころを  $n$  回投げて出た目の数を順に  $a_1, a_2, \dots, a_n$  とし、

$$K_n = |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \dots + |a_{n-1} - a_n| + |a_n - 6|$$

とおく。また、 $K_n$  のとりうる値の最小値を  $q_n$  とする。

- (1)  $K_3 = 5$  となる確率を求めよ。
- (2)  $q_n$  を求めよ。また、 $K_n = q_n$  となるための  $a_1, a_2, \dots, a_n$  に関する必要十分条件を求めよ。
- (3)  $n$  を 4 以上の自然数とする。 $L_n = K_n + |a_4 - 4|$  とおき、 $L_n$  のとりうる値の最小値を  $r_n$  とする。 $L_n = r_n$  となる確率  $p_n$  を求めよ。

## ▶ 解法 1 (標準解法)

## 【方針】

$K_n$  は数直線上で 1 から 6 へ向かう折れ線の長さであり、最小値は三角不等式から 5 である。等号は途中で逆戻りしない場合、つまり  $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq 6$  に限られる。(3) では  $L_n = K_n + |a_4 - 4|$  なので、最小値をとるにはさらに  $a_4 = 4$  が必要。 $a_4$  の左側と右側を非減少列として分け、重複組合せで数える。

## 【解答】

(1)  $K_3$  は、数直線上で  $1 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow a_3 \rightarrow 6$  と進む移動距離の合計である。これが最短距離 5 に等しいのは、途中で逆戻りしないとき、すなわち  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 6$  のときである。

このような列は、6 種類の中から重複を許して 3 個を非減少に選ぶ個数に等しい。したがって  ${}_{6+3-1}C_3 = {}_8C_3 = 56$  通りである。全事象は  $6^3$  通りなので、確率は  $\frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}$  である。

(2) 三角不等式より  $K_n \geq |1 - 6| = 5$  である。一方、非減少列を選べば  $K_n = 5$  は実現できるので  $q_n = 5$  である。

等号成立は、数直線上で 1 から 6 へ進む途中で逆戻りがないことと同値である。したがって  $K_n = q_n$  となるための必要十分条件は  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 6$  である。

(3)  $K_n \geq 5$ ,  $|a_4 - 4| \geq 0$  であるから  $L_n = K_n + |a_4 - 4| \geq 5$  である。また、たとえば  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 = 4 \leq a_5 \leq \dots \leq a_n$  を満たす列を取れば  $L_n = 5$  が実現できる。よって  $r_n = 5$  である。 $L_n = r_n$  となるためには、 $K_n = 5$  かつ  $|a_4 - 4| = 0$  でなければならない。したがって必要十分条件は

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 = 4 \leq a_5 \leq \dots \leq a_n \leq 6$$

である。

初めの 3 項  $a_1, a_2, a_3$  は、1, 2, 3, 4 から重複を許して 3 個を非減少に選ぶので  ${}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$  通りである。残りの  $n - 4$  項は、4, 5, 6 から重複を許して  $n - 4$  個を非減少に選ぶので  ${}_{3+(n-4)-1}C_{n-4} = {}_{n-2}C_2$  通りである。

よって条件を満たす列は  $20 {}_{n-2}C_2$  通りであり、全事象は  $6^n$  通りである。したがって  $p_n = \frac{20 {}_{n-2}C_2}{6^n} = \frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}$  である。

## ▶ 別解（下降量の恒等式と出現回数）

## 【方針】

各移動の下降量の総和を  $D$  として  $K_n = 5 + 2D$  を導く。最小条件を等式で判定し、非減少列は各出目の出現回数で数える。

## 【解答】

両端に  $a_0 = 1$ ,  $a_{n+1} = 6$  を加え、各差  $a_{j+1} - a_j$  のうち負のものの絶対値の和を  $D$  とする。右向き移動量の総和を  $U$  とすれば

$$U - D = 5$$

なので

$$K_n = U + D = 5 + 2D. \quad (*)$$

(1)  $K_3 = 5$  は  $D = 0$ , すなわち  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$  と同値である。各目の出現回数  $m_1, \dots, m_6$  は

$$m_1 + \dots + m_6 = 3, \quad m_j \geq 0$$

を満たし、逆にこの解から非減少列が一意に決まる。解の個数は

$${}_8C_5 = 56$$

だから、求める確率は

$$\frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}.$$

(2) (\*) より

$$q_n = 5.$$

等号は  $D = 0$  のとき、すなわち

$$1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq 6$$

のとき、かつそのときに限る。

(3) (\*) を使うと

$$L_n = 5 + 2D + |a_4 - 4|.$$

したがって最小値は  $r_n = 5$  であり、等号条件は

$$D = 0, \quad a_4 = 4.$$

すなわち

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 4 \leq a_5 \leq \dots \leq a_n$$

である。

初めの 3 項は 1, 2, 3, 4 の出現回数の和が 3 となるので

$${}_6C_3 = 20$$

通りである。後ろの  $n - 4$  項は 4, 5, 6 の出現回数の和が  $n - 4$  となるので

$${}_{n-2}C_2$$

通りである。全事象は  $6^n$  通りだから

$$p_n = \frac{20 {}_{n-2}C_2}{6^n} = \frac{10(n-2)(n-3)}{6^n}.$$

【総評】 絶対値和の等号条件と重複組合せを使う確率問題。目安時間は 16 分。(1)(2) は文系第 3 問と同じ構造で、数直線上の移動距離として読むと短い。(3) は  $a_4 = 4$  が追加されるため、列を  $a_4$  の左と右に分けるのが自然である。左側は 4 種類から 3 個、右側は 3 種類から  $n - 4$  個を非減少に選ぶ、という分解を明示すると数え落としを防げる。重複組合せと下降量で  $p_n = 10(n-2)(n-3)/6^n$  が一致した。重複組合せと下降量で  $p_n = 10(n-2)(n-3)/6^n$  が一致した。重複組合せと下降量で  $p_n = 10(n-2)(n-3)/6^n$  が一致した。

## 【第 5 問】

$a, b$  を  $a^2 + b^2 < 1$  をみたす正の実数とする。また、座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を  $C$  とし、 $C$  の内部にある 2 点  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$  を考える。 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  に対して  $C$  上の点  $P(\cos \theta, \sin \theta)$  を考え、 $P$  における  $C$  の接線に関して  $B$  と対称な点を  $D$  とおく。

- (1)  $f(\theta) = ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta$  とおく。方程式  $f(\theta) = 0$  の解が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。
- (2)  $D$  の座標を  $b, \theta$  を用いて表せ。
- (3)  $\theta$  が  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  の範囲を動くとき、3 点  $A, P, D$  が同一直線上にあるような  $\theta$  は少なくとも 1 つ存在することを示せ。また、このような  $\theta$  はただ 1 つであることを示せ。

## ▶ 解法 1 (標準解法)

## 【方針】

(1) は  $f(\theta)$  が連続であることと、端での符号  $f(0) < 0$ ,  $f(\pi/2) > 0$  を使う。(2) は接線を  $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$  とし、点を直線に関して反射する公式を法線方向  $(\cos \theta, \sin \theta)$  に沿って書く。(3) は  $A, P, D$  の共線条件を 2 つの方向ベクトルの比例、または面積 0 の条件で整理して  $f(\theta) = 0$  に帰着する。一意性は  $f'(\theta) > 0$  を示すため、 $u = a \cos \theta + b \sin \theta$  において  $0 < u < 1$ ,  $4ab \sin \theta \cos \theta \leq u^2$  を使う。

## 【解答】

(1)  $0 < \theta < \pi/2$  で  $f(\theta)$  は連続である。端での値を考えると  $f(0) = ab - b = b(a - 1)$  である。 $a^2 + b^2 < 1$ ,  $a > 0$  より  $a < 1$  なので  $f(0) < 0$  である。また  $f(\frac{\pi}{2}) = -ab + a = a(1 - b)$  であり、 $b < 1$  だから  $f(\frac{\pi}{2}) > 0$  である。よって中間値の定理により、 $f(\theta) = 0$  は  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  に少なくとも 1 つ解をもつ。

(2)  $P = (\cos \theta, \sin \theta)$  における単位円  $C$  の接線は  $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$  である。この直線の法線方向は  $(\cos \theta, \sin \theta)$  である。点  $B = (0, b)$  について、直線の左辺の値は  $b \sin \theta$  である。したがって  $B$  から接線まで法線方向に進む距離は、符号つきで  $1 - b \sin \theta$  である。反射点  $D$  は、 $B$  から接線までの法線方向の移動を 2 倍した点なので  $D = B + 2(1 - b \sin \theta)(\cos \theta, \sin \theta)$  である。よって

$$D = (2(1 - b \sin \theta) \cos \theta, b + 2(1 - b \sin \theta) \sin \theta)$$

である。

(3)  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$  とおく。 $A = (a, 0)$ ,  $P = (c, s)$  であり、(2) より  $D = (2(1 - bs)c, b + 2(1 - bs)s)$  である。

3 点  $A, P, D$  が同一直線上にあることは、 $\overrightarrow{AP}$  と  $\overrightarrow{AD}$  が平行であることと同値である。したがって  $(c - a)\{b + 2(1 - bs)s\} - s\{2(1 - bs)c - a\} = 0$  である。これを整理すると  $(c - a)b + 2s(c - a)(1 - bs) - 2sc(1 - bs) + as = 0$  であり、 $bc - ab + as - 2as(1 - bs) = 0$  となる。さらに整理して  $ab(2s^2 - 1) + as - bc = 0$  である。 $2s^2 - 1 = -\cos 2\theta$  を用い、両辺に  $-1$  を掛けると  $ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta = 0$  となる。これは  $f(\theta) = 0$  である。したがって (1) より、条件を満たす  $\theta$  は少なくとも 1 つ存在する。

次に一意性を示す。微分すると  $f'(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta - 4ab \sin \theta \cos \theta$  である。ここで  $u = a \cos \theta + b \sin \theta$  とおく。 $a, b > 0$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  より  $u > 0$  である。また、 $a^2 + b^2 < 1$  と  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  より  $u < 1$  である。

さらに  $u^2 - 4ab \sin \theta \cos \theta = (a \cos \theta - b \sin \theta)^2 \geq 0$  だから  $4ab \sin \theta \cos \theta \leq u^2$  である。よって  $f'(\theta) = u - 4ab \sin \theta \cos \theta \geq u - u^2 = u(1 - u) > 0$  である。

したがって  $f(\theta)$  は  $0 < \theta < \pi/2$  で狭義単調増加である。 $f(\theta) = 0$  の解は高々 1 つであり、すでに存在は示したので、条件を満たす  $\theta$  はただ 1 つである。

## ▶ 別解（法線射影と行列式）

## 【方針】

接線の単位法線への射影で反射点を一式に表す。3 点の共線条件を 2 次の行列式で判定し、得られた関数の導関数を評価する。

## 【解答】

(1)  $a^2 + b^2 < 1$ ,  $a, b > 0$  より  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$  である。したがって

$$f(0) = b(a - 1) < 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a(1 - b) > 0.$$

$f$  は閉区間で連続なので、中間値の定理から

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

に少なくとも一つ零点がある。

(2)  $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$  とおく。接線は

$$cx + sy = 1$$

であり、 $\mathbf{n} = (c, s)$  はその単位法線ベクトルである。点  $B = (0, b)$  から接線までの法線方向の符号つき長さは

$$1 - B \cdot \mathbf{n} = 1 - bs.$$

反射ではこの移動を 2 倍するから

$$D = B + 2(1 - bs)\mathbf{n}.$$

よって

$$D = (2(1 - b \sin \theta) \cos \theta, b + 2(1 - b \sin \theta) \sin \theta).$$

(3)  $A = (a, 0)$ ,  $P = (c, s)$  とし、(2) の  $D$  を用いる。3 点が共線であるための必要十分条件は

$$\det(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AD}) = 0.$$

左辺を整理すると

$$-\{ab \cos 2\theta + a \sin \theta - b \cos \theta\} = -f(\theta)$$

となる。したがって (1) により共線となる  $\theta$  は少なくとも一つ存在する。

一意性を示すため

$$u = a \cos \theta + b \sin \theta$$

とおく。Cauchy-Schwarz の不等式と仮定から

$$0 < u < \sqrt{a^2 + b^2} < 1.$$

また

$$u^2 - 4ab \sin \theta \cos \theta = (a \cos \theta - b \sin \theta)^2 \geq 0.$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= u - 4ab \sin \theta \cos \theta \\ &\geq u - u^2 = u(1 - u) > 0. \end{aligned}$$

したがって  $f$  は区間内で狭義単調増加であり、零点はただ一つである。つまり 3 点  $A, P, D$  が同一直線上にある  $\theta$  もただ一つである。

【総評】 反射点の座標計算、共線条件、単調性証明をつなぐ重めの図形問題。目安時間は 25 分。(1) の存在は端の符号だけでよいが、 $a, b < 1$  が  $a^2 + b^2 < 1$  から従うことを使う。(2) は接線の法線方向が  $P$  の位置ベクトルそのものである点が鍵である。(3) は共線条件の代数整理が長いため、 $c = \cos \theta$ ,  $s = \sin \theta$  と置いて符号を管理する。一意性では  $a \cos \theta + b \sin \theta < 1$  と平方の不等式を組み合わせるのが最短である。成分比例と行列式で共線条件が一致し、 $f'(\theta) > 0$  も再確認した。成分比例と行列式で共線条件が一致し、 $f'(\theta) > 0$  も再確認した。成分比例と行列式で共線条件が一致し、 $f'(\theta) > 0$  も再確認した。