

入 学 試 験 問 題

数 学



北 海 道 大 学 2024 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 5 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 7 ページあり、問題は全部で 5 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

t を実数とし, xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および点 $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える。

- (1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。
- (2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき, 点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし, x 軸, y 軸との共有点がある場合は, それらの座標を求め, 図中に記せ。

第 2 問

各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」, 「2」, 「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり, 残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて, 出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし, この試行を繰り返す。例えば, 3 回の試行を行ったとき, 出た面に書かれた数が「0」, 「2」, 「3」であれば, 持ち点は 5 となる。なお, さいころが水平な床面にあるとき, さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また, さいころを投げるとき, 各面が出ることは同様に確からしいとする。

- (1) この試行を n 回行ったとき, 持ち点が 2 以下である確率を求めよ。ただし, n は 2 以上の自然数とする。
- (2) この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに, さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ。

第 3 問

次の問に答えよ。

- (1) α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

第 4 問

三角形 OAB が、 $|\overrightarrow{OA}| = 3$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし、この内接円と辺 OA の接点を H とする。

- (1) 辺 OB の長さを求めよ。
- (2) $\overrightarrow{OI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
- (3) $\overrightarrow{HI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

第 5 問

関数

$$f(x) = x \log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

を考える。 $y = f(x)$ で表される曲線を C とする。 C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを l とする。ただし、 $\log t$ は t の自然対数である。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ。
- (3) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)