

北海道大学 2024 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

t を実数とし、 xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および点 $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える。

- (1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。
- (2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき、点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし、 x 軸、 y 軸との共有点がある場合は、それらの座標を求め、図中に記せ。

【方針】

- (1) $P = Q$ から得る二つの三角方程式を連立し、一方を因数分解して候補を出した後、もう一方へ必ず戻して確認する。
- (2) $P = (x, y)$ とおき、 $y = \cos t$, $x = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ から媒介変数を消去する。さらに $0 < t < 2\pi$ による端点の包含を調べ、軸との交点を記す。

【解答】

(1) 点 P と点 Q が一致する条件は $\cos 2t = \sin t$, $\cos t = \sin 2t$ である。第 2 式は $\cos t = 2\sin t \cos t$ すなわち $\cos t(1 - 2\sin t) = 0$ である。

まず $\cos t = 0$ のとき、 $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ である。このうち $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ では $\cos 2t = \cos \pi = -1$, $\sin t = 1$ となり第 1 式を満たさない。一方、 $t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ では $\cos 2t = \cos 3\pi = -1$, $\sin t = -1$ となり第 1 式も満たす。

次に $1 - 2\sin t = 0$, すなわち $\sin t = \frac{1}{2}$ のとき、 $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ である。このとき、いずれも $\cos 2t = \frac{1}{2} = \sin t$ となり、第 1 式も満たす。

したがって、求める t は

$$t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

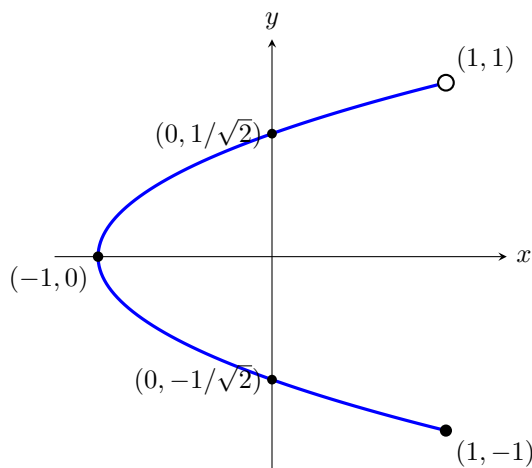
である。

(2) $P = (x, y)$ とおく。定義より $y = \cos t$, $x = \cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ であるから、 $x = 2y^2 - 1$ を得る。

また、 $0 < t < 2\pi$ で $y = \cos t$ が動く範囲は $-1 \leq y < 1$ である。 $y = -1$ は $t = \pi$ で実際にとるが、 $y = 1$ は $t = 0, 2\pi$ でしかとらないため、この範囲には含まれない。したがって軌跡は $x = 2y^2 - 1$ ($-1 \leq y < 1$) で表される放物線である。頂点は $(-1, 0)$ 、点 $(1, -1)$ は含まれ、点 $(1, 1)$ は含まれない。

x 軸との共有点は $y = 0$ として $x = -1$ より $(-1, 0)$ である。 y 軸との共有点は $x = 0$ として $2y^2 - 1 = 0$ より $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ である。

【軌跡】



軌跡は放物線 $x = 2y^2 - 1$ のうち $-1 \leq y < 1$ の部分である。上端だけが開いている。

【総評】 【公式出題意図・採点講評との対応】 公式は、一般角と倍角公式を用いて媒介変数を消去し、軌跡の関係式を得る力を問うている。採点講評は媒介変数を消去せず増減表だけで図を描く答案を問題視しているため、 $x = 2y^2 - 1$ と範囲を先に確定した。

難度 5, 計算量 4, 想定時間 10 分。(1) は一方の方程式から得た候補をもう一方へ戻す必要がある。(2) は $y = 1$ のみ除外される非対称な端点処理が重要である。

【独立検算】 三つの解族を両方の三角方程式へ代入し、軌跡上の軸交点と包含端点を数値でも確認した。

【第 2 問】

各面に 1 つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」、「2」、「3」が書かれた面がそれぞれ 1 つずつあり、残りの 5 つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて、出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は 0 とし、この試行を繰り返す。例えば、3 回の試行を行ったとき、出た面に書かれた数が「0」、「2」、「3」であれば、持ち点は 5 となる。なお、さいころが水平な床面にあるとき、さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また、さいころを投げるとき、各面が出ることは同様に確からしいとする。

- (1) この試行を n 回行ったとき、持ち点が 2 以下である確率を求めよ。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。
(2) この試行を 4 回行って持ち点が 10 以上であったときに、さらにこの試行を 2 回行って持ち点が 17 以上である条件付き確率を求めよ。

【方針】

(1) 合計 $0 \cdot 1 \cdot 2$ を場合分けし、0 の面が 5 通りあることを各残余試行へ掛ける。(2) まず 4 回後が $10 \cdot 11 \cdot 12$ 点となる並びを数える。条件事象の各並びに追加 2 回の 8^2 通りを対応させ、初期得点ごとに 17 点へ届く追加出目を数えて条件付き確率を作る。

【解答】

(1) n 回の持ち点が 2 以下になる場合を、合計が 0, 1, 2 の場合に分けて数える。各試行は 8 つの面が同様に確からしく、0 の面は 5 つ、1, 2, 3 の面はそれぞれ 1 つである。

合計が 0 になるには、すべて 0 が出ればよいので 5^n 通りである。

合計が 1 になるには、1 が 1 回だけ出て、残りがすべて 0 であればよい。1 の出る位置は n 通りで、残りは 0 の面を選ぶので $n5^{n-1}$ 通りである。

合計が 2 になる場合は 2 種類ある。1 つは、2 が 1 回だけ出て、残りがすべて 0 の場合で、 $n5^{n-1}$ 通りである。もう 1 つは、1 が 2 回出て、残りがすべて 0 の場合で、 ${}_nC_25^{n-2}$ 通りである。

したがって、持ち点が 2 以下である確率は $\frac{5^n + 2n5^{n-1} + {}nC_25^{n-2}}{8^n}$ である。

(2) まず、4 回行った後の持ち点が 10 以上となる場合を数える。4 回の最大持ち点は 12 である。

持ち点 12 は (3, 3, 3, 3) の 1 通りである。持ち点 11 は、3 が 3 回、2 が 1 回出る場合で、2 の位置により 4 通りである。持ち点 10 は、(3, 3, 3, 1) の並べ替え 4 通りと、(3, 3, 2, 2) の並べ替え 6 通りで、合わせて 10 通りである。よって条件「4 回後の持ち点が 10 以上」を満たす場合は $10 + 4 + 1 = 15$ 通りである。

次に、この条件のもとでさらに 2 回行い、最終的に 17 以上となる場合を数える。4 回後の持ち点が 10 のとき、追加 2 回の最大は 6 なので 17 以上には届かない。4 回後の持ち点が 11 のときは追加で 6 が必要であり、これは (3, 3) の 1 通りである。4 回後の持ち点が 12 のときは追加で 5 以上が必要であり、(2, 3), (3, 2), (3, 3) の 3 通りである。

したがって、条件付き確率の分子にあたる場合の数は $4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 7$ 通りである。条件側の 15 通りそれぞれについて、追加 2 回の出方は $8^2 = 64$ 通りあるので、求める条件付き確率は $\frac{7}{15 \cdot 64} = \frac{7}{960}$ である。

【問 2 の得点別整理】

4回後の得点	並びの数	追加 2 回に必要な得点	成功する追加出目の数
10	10	7以上	0
11	4	6	(3, 3) の 1
12	1	5以上	(2, 3), (3, 2), (3, 3) の 3

したがって成功拡張列は $10 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 7$ 通りである。

【総評】 【公式出題意図・採点講評との対応】 公式は変則的なさいころの設定理解と条件付き確率の定義を評価している。採点講評は最終計算の単純ミスを指摘しているため、4 回後の得点別の通り数と追加 2 回の成功数を分離した。

難度 6, 計算量 5, 想定時間 13 分。(1) の合計 2 には「2 が 1 回」と「1 が 2 回」の二種類がある。(2) の分母は条件を満たす 15 通りだけでなく, その各々に続く追加 2 回の 64 通りを含む。

【独立検算】面を区別した 8^6 通りを全列挙し, 条件事象が 15 通り, 条件と最終 17 点以上を同時に満たす拡張列が 7 通りで, 確率 $7/960$ となることを確認した。

【第 3 問】

次の問に答えよ。

- (1) α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (2) 関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

▶ 標準解法 (積分値を同型の漸化式にする)

【方針】

- (1) 固定値 2 を引いて等比数列にする。(2)

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$$

とおく。定義式を積分すると $I_{n+1} = 1 + I_n/2$ となり, (1) と同じ漸化式になる。 I_n を求めて定義式へ戻し, 最後に $n = 1$ でも公式が成立することを確認する。

【解答】

(1) 漸化式 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ について, 両辺から 2 を引くと $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$ である。したがって数列 $a_n - 2$ は初項 $a_1 - 2 = \alpha - 2$ 公比 $1/2$ の等比数列である。よって $a_n - 2 = (\alpha - 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり, $a_n = 2 + \frac{\alpha - 2}{2^{n-1}}$ である。

(2)

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$$

とおく。定義より $f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + I_n x$ である。両辺を 0 から 1 まで積分すると,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (n+2)x^{n+1} dx + I_n \int_0^1 x dx \\ &= 1 + \frac{1}{2}I_n. \end{aligned}$$

また

$$I_1 = \int_0^1 3t dt = \frac{3}{2}$$

である。

これは (1) と同じ形の漸化式であり, 固定値は 2 である。したがって $I_n = 2 + \frac{I_1 - 2}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n}$ である。

いま, 定義式を $n-1$ に対して用いると, $n \geq 2$ で $f_n(x) = (n+1)x^n + I_{n-1}x$ である。上で求めた式から $I_{n-1} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ なので, $f_n(x) = (n+1)x^n + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)x$ である。 $n = 1$ のときも右辺は $2x + (2-1)x = 3x$ となり, $f_1(x) = 3x$ と一致する。よってすべての正の整数 n について $f_n(x) = (n+1)x^n + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)x$ である。

▶ 別解（関数列の公式を直接帰納法で証明）

【方針】

標準解法で得た形を予想し、 f_n の積分を実行してそのまま f_{n+1} へ代入する。補助数列 I_n を明示的に解かない検算用の証明である。

【解答】

(1) 固定値 2 を引けば等比数列となるので

$$a_n = 2 + \frac{\alpha - 2}{2^{n-1}}$$

である。

(2)

$$f_n(x) = (n+1)x^n + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)x \quad (*)$$

を示す。 $n=1$ では右辺は $2x + (2-1)x = 3x = f_1(x)$ である。

ある n で $(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\int_0^1 f_n(t) dt = 1 + \frac{1}{2} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

よって定義式から

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(2 - \frac{1}{2^n}\right)x,$$

となり、 $n+1$ でも $(*)$ が成り立つ。数学的帰納法によりすべての正整数 n で $(*)$ が成立する。

【総評】 【公式出題意図・採点講評との対応】 公式は整式列の一次係数、すなわち積分値を追うことを鍵としている。採点講評も積分部分が n だけで決まる定数であることが出発点と述べているため、 I_n を独立に定義した。帰納法の別解も収録した。

難度 6, 計算量 5, 想定時間 13 分。公式問題 PDF を原寸確認し、初項は $a_1 = \alpha$ である。旧データの $a_1 = \alpha_1$ は転記誤りだったため修正した。添字を一つ戻して I_{n-1} を使う点に注意する。

【独立検算】 $I_n = 2 - 2^{-n}$ を 10 項まで有理数で生成し、得られた f_n を積分して次の定義式へ戻ることを確認した。

【第 4 問】

三角形 OAB が、 $|\vec{OA}| = 3$, $|\vec{AB}| = 5$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし、この内接円と辺 OA の接点を H とする。

- (1) 辺 OB の長さを求めよ。
- (2) $\vec{OI}$ を $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ を用いて表せ。
- (3) $\vec{HI}$ を $\vec{OA}$ と $\vec{OB}$ を用いて表せ。

【方針】

(1) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ を二乗して OB を求める。(2) 内心を、各頂点に向かい合う辺長で重み付けした位置ベクトルとして表す。(3) 半周長から接線長 OH を出し、 $\vec{HI} = \vec{OI} - \vec{OH}$ を計算する。

【解答】

(1) $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ であるから、

$$\begin{aligned} |\vec{AB}|^2 &= |\vec{OB} - \vec{OA}|^2 \\ &= |\vec{OB}|^2 + |\vec{OA}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OB}. \end{aligned}$$

条件を代入すると $25 = |\vec{OB}|^2 + 9 - 20$ である。したがって $|\vec{OB}|^2 = 36$ より、辺 OB の長さは 6 である。

(2) 三角形の辺の長さは $OA = 3$, $OB = 6$, $AB = 5$ である。内心は、各頂点の位置ベクトルを、その頂点に向かい合う辺の長さで重みづけた点である。頂点 O, A, B に向かい合う辺の長さはそれぞれ $AB = 5$, $OB = 6$, $OA = 3$ である。

O の位置ベクトルは $\vec{0}$ なので,

$$\vec{OI} = \frac{5\vec{OO} + 6\vec{OA} + 3\vec{OB}}{5 + 6 + 3} = \frac{6\vec{OA} + 3\vec{OB}}{14}$$

である。よって

$$\vec{OI} = \frac{3}{7}\vec{OA} + \frac{3}{14}\vec{OB}$$

である。

(3) 内接円が辺 OA と接する点を H とする。頂点 O から辺 OA と OB に引いた 2 本の接線の長さは等しい。半周長は $\frac{OA + OB + AB}{2} = \frac{3 + 6 + 5}{2} = 7$ であるから、頂点 O からの接線長は $OH = \frac{OA + OB - AB}{2} = \frac{3 + 6 - 5}{2} = 2$ である。

H は辺 OA 上にあり、 $OA = 3$ なので $\vec{OH} = \frac{2}{3}\vec{OA}$ である。したがって

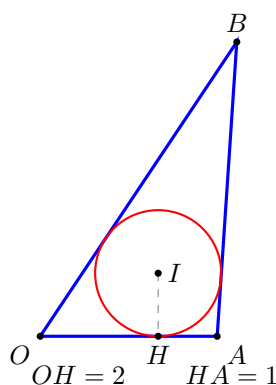
$$\begin{aligned}\vec{HI} &= \vec{OI} - \vec{OH} \\ &= \left(\frac{3}{7} - \frac{2}{3}\right)\vec{OA} + \frac{3}{14}\vec{OB} \\ &= -\frac{5}{21}\vec{OA} + \frac{3}{14}\vec{OB}.\end{aligned}$$

よって

$$\vec{HI} = -\frac{5}{21}\vec{OA} + \frac{3}{14}\vec{OB}$$

である。

【内心と接点の位置】



$OH = (OA + OB - AB)/2 = 2$ である。 $HI \perp OA$ は図から確認でき、求めたベクトルの内積が 0 になることも検算できる。

【総評】 【公式出題意図・採点講評との対応】 公式は、長さ・内積の正確な計算と内心の定義・性質の理解を問うている。採点講評では全体に良好だったとしており、本解答は内心公式の重みと接線長の根拠を省略せず記した。

難度 6, 計算量 5, 想定時間 12 分。内心の重みは頂点に向かい合う辺長であり、 A には $OB = 6$, B には $OA = 3$ が掛かる。 $\vec{HI}$ は $I - H$ の向きである。

【独立検算】 条件を満たす座標を置き、求めた $\vec{HI}$ と $\vec{OA}$ の内積が 0 になること、 $OH = 2$ を確認した。

【第 5 問】

関数

$$f(x) = x \log(x+2) + 1 \quad (x > -2)$$

を考える。 $y = f(x)$ で表される曲線を C とする。 C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを l とする。ただし、 $\log t$ は t の自然対数である。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
- (2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ。
- (3) C と l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

【方針】

原点を通る接線の接点を $x = a$ とし、切片が 0 となる条件 $f(a) = af'(a)$ を解く。二候補から傾きが正のものを選ぶ。(2) は $f''(x) > 0$ を定義域全体で示す。(3) は凸性から曲線が接線の上側にあることを保証し、 $x = 0$ から接点まで差を積分する。

【解答】

(1) 接点の x 座標を a とする。まず $f'(x) = \log(x+2) + \frac{x}{x+2}$ である。接線の方程式は $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ であり、これが原点を通るための条件は $0 = f'(a)(0-a) + f(a)$ すなわち $f(a) = af'(a)$ である。

これを代入すると $a \log(a+2) + 1 = a \left\{ \log(a+2) + \frac{a}{a+2} \right\}$ である。両辺の $a \log(a+2)$ が消えて $1 = \frac{a^2}{a+2}$ となる。 $a > -2$ であるから分母は正であり、 $a^2 = a+2$ すなわち $(a-2)(a+1) = 0$ である。よって候補は $a = 2$, $a = -1$ である。

$a = -1$ のとき、接線の傾きは $f'(-1) = \log 1 - 1 = -1$ で負である。したがって条件に合わない。 $a = 2$ のとき、傾きは $f'(2) = \log 4 + \frac{1}{2}$ で正である。よって求める直線 l は $y = \left(\log 4 + \frac{1}{2}\right)x$ である。

(2) (1) で求めた $f'(x) = \log(x+2) + \frac{x}{x+2}$ をさらに微分すると、 $f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2}$ である。定義域は $x > -2$ なので、 $x+4 > 2 > 0$, $(x+2)^2 > 0$ である。したがって $f''(x) > 0$ であり、曲線 C は下に凸である。

(3) (2) より、曲線 C は任意の接線の上側にある。したがって、 C と接線 l および y 軸で囲まれた部分の面積は

$$\int_0^2 \left\{ x \log(x+2) + 1 - \left(\log 4 + \frac{1}{2} \right) x \right\} dx$$

である。

まず

$$\int_0^2 x \log(x+2) dx$$

を計算する。 $u = x+2$ とおくと、 $x = u-2$ であり、 $x = 0$ のとき $u = 2$, $x = 2$ のとき $u = 4$ である。よって

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \log(x+2) dx &= \int_2^4 (u-2) \log u du \\ &= \int_2^4 u \log u du - 2 \int_2^4 \log u du. \end{aligned}$$

ここで

$$\int u \log u du = \frac{u^2}{2} \log u - \frac{u^2}{4}, \quad \int \log u du = u \log u - u$$

であるから、計算して

$$\int_0^2 x \log(x+2) dx = 1 + 2 \log 2$$

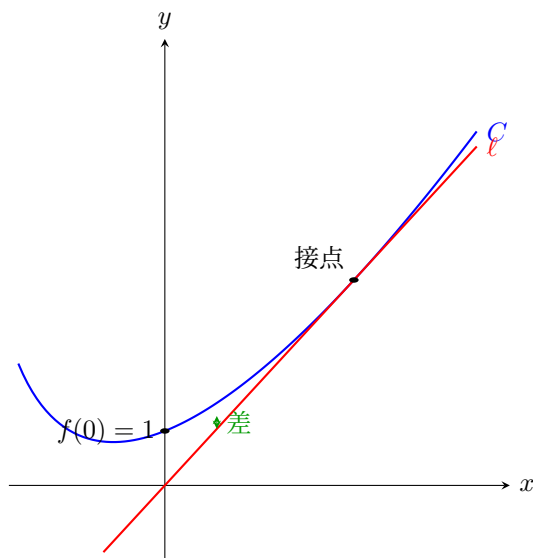
を得る。

したがって面積 S は

$$\begin{aligned}
 S &= (1 + 2\log 2) + \int_0^2 1 \, dx - \left(\log 4 + \frac{1}{2} \right) \int_0^2 x \, dx \\
 &= (1 + 2\log 2) + 2 - \left(\log 4 + \frac{1}{2} \right) \cdot 2 \\
 &= 3 + 2\log 2 - 2\log 4 - 1 \\
 &= 2 - 2\log 2.
 \end{aligned}$$

よって、求める面積は $2 - 2\log 2$ である。

【凸性と面積領域】



$f'' > 0$ なので曲線は接線の上側にあり、 $0 \leq x \leq 2$ で差を積分すれば符号を誤らない。

【総評】 **【公式出題意図・採点講評との対応】** 公式は接線・面積の基本技術に加え、関数が下に凸である意味の理解を重視している。採点講評は「極小値をもつ」だけでは凸性の証明にならないと指摘しているため、定義域全体で $f''(x) > 0$ を示した。

難度 7, 計算量 6, 想定時間 16 分。接線候補 $a = 2, -1$ のうち、傾きが正なのは $a = 2$ だけ。凸性から曲線 - 接線が非負と分かって初めて、面積を符号なしで積分できる。

【独立検算】 接線が原点と $(2, f(2))$ を通ることを代入確認し、積分を置換・数値積分の両方で照合して面積 $2 - 2\log 2$ を確認した。