

北海道大学 2025 年度 理系

解答

全 5 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

α, r を $\alpha > 1, r > 1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = \alpha$ で公比が r の等比数列とする。数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \log_{a_n}(a_{n+1}) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。

(1) b_n を n と $\log_{\alpha} r$ を用いて表せ。

(2) 等式

$$b_n = \frac{n+2}{n+1}$$

がすべての自然数 n について成り立つための必要十分条件を r と α を用いて表せ。

(3) (2) の条件が成り立つとき、積 $a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, a_1 a_2 a_3 a_4$ の整数部分がそれぞれ 2 桁, 3 桁, 4 桁になるような α の範囲を求めよ。

【方針】

等比数列 $a_n = \alpha r^{n-1}$ を明示し、底を α とする対数で b_n を整理する。 $c = \log_{\alpha} r$ と置けば式が 1 変数になり、すべての自然数 n で $(1+nc)/(1+(n-1)c) = (n+2)/(n+1)$ が成り立つ条件を計算できる。(3) は $r = \sqrt{\alpha}$ のもとで $a_n = \alpha^{(n+1)/2}$ とし、積の指数を $k(k+3)/4$ とまとめる。整数部分の桁数は $10^{d-1} \leq X < 10^d$ に直して、3 つの範囲の共通部分を取る。

【解答】

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 α 、公比 r の等比数列なので $a_n = \alpha r^{n-1}$, $a_{n+1} = \alpha r^n$ である。ここで $c = \log_{\alpha} r$ とおく。 $\alpha > 1, r > 1$ だから $c > 0$ である。底の変換を用いると

$$\begin{aligned} b_n &= \log_{a_n}(a_{n+1}) \\ &= \frac{\log_{\alpha}(a_{n+1})}{\log_{\alpha}(a_n)} \\ &= \frac{\log_{\alpha}(\alpha r^n)}{\log_{\alpha}(\alpha r^{n-1})} \\ &= \frac{1 + n \log_{\alpha} r}{1 + (n-1) \log_{\alpha} r} \end{aligned}$$

である。したがって $b_n = \frac{1 + n \log_{\alpha} r}{1 + (n-1) \log_{\alpha} r}$ である。

(2) $c = \log_{\alpha} r$ とおくと、(1) より $b_n = \frac{1+nc}{1+(n-1)c}$ である。これがすべての自然数 n について $\frac{n+2}{n+1}$ に等しいための条件を求める。 $c > 0$ なので分母は正であり、交差に掛けて $(n+1)(1+nc) = (n+2)\{1+(n-1)c\}$ である。両辺を展開すると $n+1+n(n+1)c = n+2+(n+2)(n-1)c$ である。ここで $n(n+1) - (n+2)(n-1) = 2$ だから $n+1+\{(n+2)(n-1)+2\}c = n+2+(n+2)(n-1)c$ より $2c = 1$ を得る。したがって $c = \frac{1}{2}$ である。逆に $c = 1/2$ なら上の等式がすべての n で成り立つので、これは必要十分条件である。

よって $\log_{\alpha} r = \frac{1}{2}$ すなわち $r = \sqrt{\alpha}$ である。

(3) (2) の条件のもとでは $r = \sqrt{\alpha}$ だから $a_n = \alpha r^{n-1} = \alpha(\sqrt{\alpha})^{n-1} = \alpha^{(n+1)/2}$ である。したがって、 k 個の積は

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_k &= \alpha^{\frac{2}{2}} \alpha^{\frac{3}{2}} \cdots \alpha^{\frac{k+1}{2}} \\ &= \alpha^{\frac{1}{2}\{2+3+\cdots+(k+1)\}} \\ &= \alpha^{\frac{k(k+3)}{4}} \end{aligned}$$

である。

整数部分が 2 桁であることは $10 \leq a_1 a_2 < 100$ と同値である。 $a_1 a_2 = \alpha^{5/2}$ なので $10 \leq \alpha^{5/2} < 100$ より $10^{2/5} \leq \alpha < 10^{4/5}$ を得る。

整数部分が 3 桁であることは $100 \leq a_1 a_2 a_3 < 1000$ と同値である。 $a_1 a_2 a_3 = \alpha^{9/2}$ なので $100 \leq \alpha^{9/2} < 1000$ より $10^{4/9} \leq \alpha < 10^{2/3}$ を得る。

整数部分が 4 桁であることは $1000 \leq a_1 a_2 a_3 a_4 < 10000$ と同値である。 $a_1 a_2 a_3 a_4 = \alpha^7$ なので $1000 \leq \alpha^7 < 10000$ より $10^{3/7} \leq \alpha < 10^{4/7}$ を得る。

これら 3 つの範囲の共通部分を取る。下端は $\max\{\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{3}{7}\} = \frac{4}{9}$ であり、上端は $\min\{\frac{4}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}\} = \frac{4}{7}$ である。したがって求める範囲は $10^{4/9} \leq \alpha < 10^{4/7}$ である。

【総評】 公式の出題意図は、対数と等比数列を組み合わせ、必要十分条件と桁数の範囲を論理的に処理する力の確認にある。(2) は $\log_\alpha r = 1/2$ が必要であるだけでなく、逆にすべての自然数 n で成立することも確認する。(3) は各積を α の累乗に直し、2 桁・3 桁・4 桁を表す半开区間の共通部分を取る。端点の包含を誤らないことが採点上重要である。

【第 2 問】

円 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ を考える。実数 p, q が $p^2 + q^2 > 1$ を満たすとき、点 $P(p, q)$ から C_1 に引いた 2 本の接線 l_1, l_2 の接点をそれぞれ $Q_1(x_1, y_1), Q_2(x_2, y_2)$ とする。また、座標平面上の原点を $O(0, 0)$ とする。

- (1) 直線 l_1, l_2 , 線分 OQ_1, OQ_2 で囲まれた四角形の面積 S を p, q を用いて表せ。
- (2) 点 P が楕円

$$C_2: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

の上を動くとき、(1) の四角形の面積 S の最大値と最小値を求めよ。

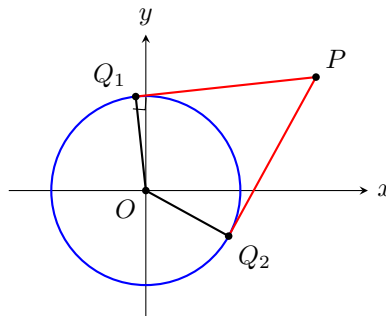
【方針】

接点 Q では半径 OQ と接線 PQ が垂直であるため、 $\triangle OPQ$ は直角三角形になる。2 本の接線について同じ長さの直角三角形ができ、四角形 OQ_1PQ_2 の面積はその 2 つ分で求められる。したがって S は $OP^2 = p^2 + q^2$ だけで決まる。(2) は楕円上の点を $(\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{3}\sin\theta)$ と置き、 $p^2 + q^2$ の範囲を求めて S の最大・最小に直す。

【解答】

(1) 点 $P(p, q)$ について $OP = \sqrt{p^2 + q^2}$ である。 $p^2 + q^2 > 1$ なので、点 P は円 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ の外部にある。

接点を Q とする。位置関係は次の模式図のようになる。



円の接線は接点で半径に垂直であるから $OQ \perp PQ$ である。また Q は単位円上の点なので $OQ = 1$ である。したがって直角三角形 OPQ において $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = p^2 + q^2 - 1$ であり、 $PQ = \sqrt{p^2 + q^2 - 1}$ である。

2 つの接線の接点を Q_1, Q_2 とすると、 $PQ_1 = PQ_2$ であり、四角形 OQ_1PQ_2 は直角三角形 OPQ_1 と OPQ_2 に分けられる。それぞれの面積は $\frac{1}{2} \cdot OQ_i \cdot PQ_i = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + q^2 - 1}$ である。よって四角形の面積は $S = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + q^2 - 1} = \sqrt{p^2 + q^2 - 1}$ である。

(2) 点 $P(p, q)$ が楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$ 上を動くので、ある実数 θ を用いて $p = \sqrt{2}\cos\theta$, $q = \sqrt{3}\sin\theta$ と表せる。このとき

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 &= 2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta \\ &= 2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin^2\theta \\ &= 2 + \sin^2\theta \end{aligned}$$

である。したがって $S = \sqrt{p^2 + q^2 - 1} = \sqrt{1 + \sin^2\theta}$ である。 $0 \leq \sin^2\theta \leq 1$ だから $1 \leq S \leq \sqrt{2}$ である。 $\sin^2\theta = 0$ は $(p, q) = (\pm\sqrt{2}, 0)$ で実現し、 $\sin^2\theta = 1$ は $(p, q) = (0, \pm\sqrt{3})$ で実現する。よって $S_{\min} = 1$, $S_{\max} = \sqrt{2}$ である。

【総評】 難度 6、計算量 5、想定時間 13 分。公式の出題意図は、複雑な座標計算を避け、円の接線と半径の直交、楕円の媒介変数表示という幾何的な見通しを使えるかにある。四角形を合同な 2 つの直角三角形に分ければ $S = \sqrt{OP^2 - 1}$ と一行で表せる。(2) は $p^2 + q^2$ の範囲だけを調べればよく、最大・最小が実際に楕円上の点で達成されることまで示す。図は接線長が 2 本とも等しい理由の確認にもなる。

【第 3 問】

実数 a および自然数 n に対して、定積分

$$I(a, n) = \int_0^{2\pi} e^{ax} \sin(nx) dx$$

を考える。ここで e は自然対数の底である。

(1) $I(a, n)$ を求めよ。

(2) $a_n = \frac{\log n}{2\pi}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) のとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n, n)$ を求めよ。ただし、 $\log n$ は n の自然対数である。

また、必要ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0$ であることを用いてもよい。

▶ 解法 1 (原始関数を直接確認)

【方針】

指数関数と三角関数の積の積分は、 $e^{ax}(A \sin nx + B \cos nx)$ の形を微分して係数を合わせるか、部分積分を 2 回行って求める。評価点 $0, 2\pi$ では $\sin(2\pi n) = 0$, $\cos(2\pi n) = 1$ を使う。(2) は $a_n = (\log n)/(2\pi)$ により $e^{2\pi a_n} = n$ となるので、(1) の式に代入し、分子分母を n^2 で割って $(\log n)/n \rightarrow 0$ を使う。

【解答】

(1) 不定積分を求める。次の式を微分すると

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{e^{ax} \{a \sin(nx) - n \cos(nx)\}}{a^2 + n^2} \right\} = e^{ax} \sin(nx)$$

である。実際、分子を微分すると $ae^{ax}\{a \sin(nx) - n \cos(nx)\} + e^{ax}\{an \cos(nx) + n^2 \sin(nx)\}$ となり、 $\cos(nx)$ の項が打ち消され、 $(a^2 + n^2)e^{ax} \sin(nx)$ が残る。したがって

$$\int e^{ax} \sin(nx) dx = \frac{e^{ax} \{a \sin(nx) - n \cos(nx)\}}{a^2 + n^2}$$

である。

これを 0 から 2π まで代入する。 n は自然数なので $\sin(2\pi n) = 0$, $\cos(2\pi n) = 1$, $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ である。よって

$$\begin{aligned} I(a, n) &= \left[\frac{e^{ax} \{a \sin(nx) - n \cos(nx)\}}{a^2 + n^2} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{-ne^{2\pi a}}{a^2 + n^2} - \frac{-n}{a^2 + n^2} \\ &= \frac{n(1 - e^{2\pi a})}{a^2 + n^2} \end{aligned}$$

である。 $a = 0$ の場合もこの式は 0 を与え、直接の積分結果と一致する。

(2) $a_n = \frac{\log n}{2\pi}$ であるから $e^{2\pi a_n} = e^{\log n} = n$ である。(1) の結果より $I(a_n, n) = \frac{n(1 - n)}{a_n^2 + n^2}$ である。分子分母を n^2 で割

ると $I(a_n, n) = \frac{\frac{1}{n} - 1}{1 + \left(\frac{a_n}{n}\right)^2}$ である。ここで $\frac{a_n}{n} = \frac{\log n}{2\pi n} \rightarrow 0$ であるから $\lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n, n) = \frac{0 - 1}{1 + 0} = -1$ である。

▶ 解法 2 (部分積分を 2 回用いる方法)

【方針】

$$I = \int e^{ax} \sin(nx) dx$$

と、途中で現れる余弦積分 J を部分積分で結び、連立して I を求める。公式の誘導意図に沿い、端点で三角関数が簡単になることを使う。

【解答】

(1)

$$I = \int_0^{2\pi} e^{ax} \sin(nx) dx, \quad J = \int_0^{2\pi} e^{ax} \cos(nx) dx$$

とおく。 $\sin(nx)$ を積分する形で部分積分すると

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{n} e^{ax} \cos(nx) \right]_0^{2\pi} + \frac{a}{n} J \\ &= \frac{1 - e^{2\pi a}}{n} + \frac{a}{n} J \end{aligned}$$

である。一方、 $\cos(nx)$ を積分する形で部分積分すると

$$J = \left[\frac{1}{n} e^{ax} \sin(nx) \right]_0^{2\pi} - \frac{a}{n} I = -\frac{a}{n} I$$

となる。これを最初の式へ代入して

$$I = \frac{1 - e^{2\pi a}}{n} - \frac{a^2}{n^2} I$$

より

$$I(a, n) = \frac{n(1 - e^{2\pi a})}{a^2 + n^2}$$

を得る。 $a = 0$ の場合にも両辺は 0 で一致する。

(2) $a_n = \frac{\log n}{2\pi}$ なので $e^{2\pi a_n} = n$ である。したがって

$$I(a_n, n) = \frac{n(1 - n)}{a_n^2 + n^2} = \frac{\frac{1}{n} - 1}{1 + \left(\frac{\log n}{2\pi n}\right)^2}.$$

$\frac{\log n}{n} \rightarrow 0$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(a_n, n) = -1$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5、想定時間 14 分。公式の出題意図は、指数関数と三角関数の積を部分積分で処理し、(1) の結果を (2) の極限へ正確につなぐことにある。原始関数を直接求めてもよいが、部分積分を 2 回行って I, J を連立する別解は符号を検算しやすい。端点では n が自然数であるため $\sin(2\pi n) = 0$ 、 $\cos(2\pi n) = 1$ となる。極限では分子分母を n^2 で割り、 $\log n/n \rightarrow 0$ を明示する。

【第 4 問】

a を正の実数とする。

- (1) a が 1 でないとき、複素数 z についての方程式

$$a|z-1| = |(a-2)z+a|$$

を考える。この方程式を満たす z 全体の集合を複素数平面上に図示せよ。

- (2) 方程式

$$|z|^2 = 6-a, \quad a|z-1| = |(a-2)z+a|$$

とともに満たす複素数 z が存在するような a の範囲を求めよ。

▶ 解法 1 (実部・虚部による座標計算)

【方針】

$z = x + yi$ とおき、絶対値の方程式を両辺 2 乗して円の方程式に直す。 $a = 1$ では因数 $a - 1$ で割れないため、(2) で必ず別扱いする。 $a \neq 1$ のとき第 2 方程式は $|z|^2 = ax$ 、第 1 方程式 $|z|^2 = 6 - a$ と合わせて $x = (6 - a)/a$ が決まる。あとは半径 $\sqrt{6 - a}$ の円上にその x 座標をもつ点が存在する条件、つまり $((6 - a)/a)^2 \leq 6 - a$ と $6 - a \geq 0$ を解く。

【解答】

(1) $z = x + yi$ とおく。このとき $|z-1|^2 = (x-1)^2 + y^2$ であり、また $(a-2)z+a = ((a-2)x+a) + (a-2)yi$ だから $|(a-2)z+a|^2 = \{(a-2)x+a\}^2 + (a-2)^2y^2$ である。両辺は 0 以上なので、与えられた方程式は、両辺を 2 乗して $a^2\{(x-1)^2 + y^2\} = \{(a-2)x+a\}^2 + (a-2)^2y^2$ と同値である。

これを整理する。左辺から右辺を引くと $4(a-1)(x^2 + y^2 - ax)$ となる。したがって $(a-1)(x^2 + y^2 - ax) = 0$ である。いま $a \neq 1$ なので $x^2 + y^2 = ax$ である。平方完成すると $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ となる。よって求める集合は

$$\text{中心 } \left(\frac{a}{2}, 0\right), \text{ 半径 } \frac{a}{2} \text{ の円}$$

である。この円は原点と点 $(a, 0)$ を通る。

(2) まず $a = 1$ の場合を調べる。このとき $a|z-1| = |(a-2)z+a|$ は $|z-1| = |-z+1| = |z-1|$ となり、すべての z で成り立つ。さらに $|z|^2 = 6 - a = 5$ を満たす z は存在する。したがって $a = 1$ は条件を満たす。

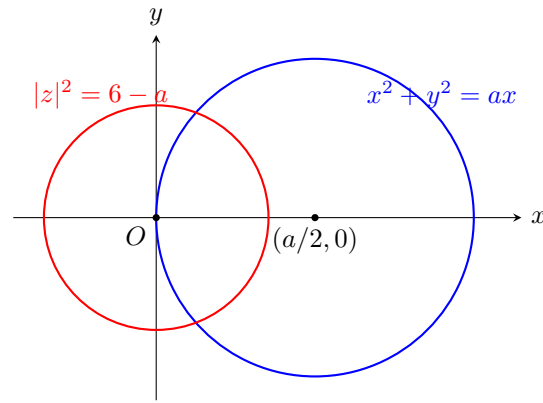
以下、 $a \neq 1$ とする。(1) より第 2 の方程式は $|z|^2 = x^2 + y^2 = ax$ と同値である。一方、第 1 の方程式は $|z|^2 = 6 - a$ である。したがって、解が存在するためにはまず $6 - a \geq 0$ が必要である。また $|z|^2 = 6 - a$ と $|z|^2 = ax$ より $x = \frac{6-a}{a}$ である。

半径 $\sqrt{6-a}$ の円 $x^2 + y^2 = 6 - a$ 上に、この x 座標をもつ点が存在するための条件は $\left(\frac{6-a}{a}\right)^2 \leq 6 - a$ である。よって存在条件は $6 - a \geq 0$ 、 $\left(\frac{6-a}{a}\right)^2 \leq 6 - a$ である。 $a > 0$ である。 $6 - a = 0$ のとき、すなわち $a = 6$ のときは

$z = 0$ が解となる。 $6 - a > 0$ のときは、不等式を $6 - a$ で割って $\frac{6-a}{a^2} \leq 1$ すなわち $a^2 + a - 6 \geq 0$ である。これは $(a+3)(a-2) \geq 0$ であり、 $a > 0$ より $a \geq 2$ を得る。 $6 - a \geq 0$ と合わせて $2 \leq a \leq 6$ である。

以上より、求める範囲は $a = 1$ 、 $2 \leq a \leq 6$ である。

例えば $a = 4$ のとき、2 円の位置関係は次の図のようになる。



▶ 解法 2 (絶対値の恒等式と 2 円の交点条件)

【方針】

絶対値を 2 乗した差を $|z|^2$ と $\operatorname{Re} z$ でまとめ、軌跡を円として得る。(2) は原点中心の円との交点条件を、中心間距離と半径から判定する。

【解答】

(1) $z = x + yi$ とする代わりに実部を用いて整理する。直接展開すると

$$a^2|z-1|^2 - |(a-2)z+a|^2 = 4(a-1)\{|z|^2 - a\operatorname{Re} z\}$$

である。与式の両辺は非負なので、絶対値の等式は 2 乗後の等式と同値である。 $a \neq 1$ より

$$|z|^2 = a\operatorname{Re} z$$

である。 $z = x + yi$ と戻せば

$$x^2 + y^2 = ax, \quad \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

したがって、軌跡は中心 $(a/2, 0)$ 、半径 $a/2$ の円である。

(2) $a = 1$ のとき、絶対値の方程式は恒等的に成り立ち、 $|z|^2 = 5$ を満たす z が存在するので適する。

以下 $a \neq 1$ とする。(1) の円を C_1 、 $|z|^2 = 6-a$ が表す円を C_2 とする。2 円の中心間距離と C_1 の半径はいずれも $a/2$ 、 C_2 の半径は $\sqrt{6-a}$ である。よってまず $a \leq 6$ が必要である。2 円が共有点をもつ条件

$$\left|\frac{a}{2} - \sqrt{6-a}\right| \leq \frac{a}{2} \leq \frac{a}{2} + \sqrt{6-a}$$

の右側は自明であり、左側は $\sqrt{6-a} \leq a$ と同値である。したがって

$$6-a \leq a^2, \quad a \leq 6.$$

$a > 0$ より前者は $a \geq 2$ となるので、 $2 \leq a \leq 6$ である。特別な場合 $a = 1$ を加え、

$$a = 1 \quad \text{または} \quad 2 \leq a \leq 6$$

を得る。端点 $a = 2, 6$ でも 2 円は接して共有点をもつ。

【総評】 難度 7、計算量 6、想定時間 18 分。公式の出題意図は、複素数の絶対値条件を代数的にも幾何的にも扱う力の確認にある。(1) は二乗が同値である理由を両辺非負と確認し、 $a = 1$ を割る前に除外する。(2) は $a = 1$ が恒等式になる特別な場合を先に処理する。残りは 2 円の交点問題であり、中心間距離と半径の条件を使う別解が見通しよい。 $a = 2, 6$ の端点を不等号から落とさないことも重要である。

【第 5 問】

n を 3 以上の整数とする。

- (1) k を整数とする。 $k < a < b < c \leq k + n$ を満たす整数 a, b, c の選び方の総数を n の式で表せ。
- (2) $1 \leq a < b < c \leq 2n$ を満たす整数 a, b, c のうち、 $a + b > c$ となる a, b, c の選び方の総数を L とする。このとき、 $L > {}_nC_3$ であることを示せ。

▶ 解法 1 (十分な部分集合を作る証明)

【方針】

(1) は $k + 1, k + 2, \dots, k + n$ の n 個から 3 個を選ぶだけで、順序は $a < b < c$ によって自動的に決まる。(2) は L を正確に数えなくてもよい。まず $n < a < b < c \leq 2n$ を満たす三つ組はすべて $a + b > c$ を満たし、その個数は (1) により ${}_nC_3$ 個である。さらにこの集合に含まれない具体例 $(2, n, n + 1)$ が条件を満たすことを示せば、 L はそれより真に大きい。

【解答】

(1) 条件 $k < a < b < c \leq k + n$ を満たす整数は、 $k + 1, k + 2, \dots, k + n$ の n 個の整数から異なる 3 個を選び、小さい順に a, b, c と並べたものにちょうど対応する。したがって選び方の総数は ${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ である。

(2) まず $n < a < b < c \leq 2n$ を満たす三つ組 (a, b, c) を考える。このとき $a > n, b > a > n$ であるから $a + b > 2n$ である。一方、 $c \leq 2n$ なので $a + b > 2n \geq c$ となり、必ず $a + b > c$ を満たす。

このような三つ組の個数は、整数 $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ の n 個から 3 個を選ぶ個数である。したがって (1) で $k = n$ とした場合にあたり、 ${}_nC_3$ 個である。よって、少なくとも ${}_nC_3$ 個の三つ組が $a + b > c$ を満たす。

さらに、 $n \geq 3$ であるから $(a, b, c) = (2, n, n + 1)$ は $1 \leq 2 < n < n + 1 \leq 2n$ を満たす。また $a + b = 2 + n > n + 1 = c$ であるから、この三つ組も $a + b > c$ を満たす。一方、この三つ組は $a = 2 \leq n$ であるため、先ほど数えた $n < a < b < c \leq 2n$ を満たす三つ組には含まれていない。

したがって、 $a + b > c$ を満たす三つ組は、少なくとも ${}_nC_3$ 個に加えて別の 1 個をもつ。ゆえに $L > {}_nC_3$ である。

▶ 解法 2 (条件を満たす三つ組の総数を求める)

【方針】

(1) は組合せで求める。(2) は最小要素 a を固定し、 $c < a + b$ を満たす (b, c) を数える。 $a \leq n$ と $a > n$ で上端 $2n$ の効き方が変わるため、二つの和に分けて正確な L を得る。

【解答】

(1) $k + 1, k + 2, \dots, k + n$ の n 個から異なる 3 個を選べば、小さい順への並べ方は一意である。したがって個数は

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

である。

(2) a を固定する。各 b に対し $b < c \leq 2n$ 、 $c < a + b$ を満たす c の個数は

$$\min\{2n - b, a - 1\}$$

である。

まず $2 \leq a \leq n$ のとき、 $b = a + 1, \dots, 2n - a + 1$ では個数が $a - 1$ 、それより大きい b では $2n - b$ である。したがって固定した a に対する個数は

$$(2n - 2a + 1)(a - 1) + \sum_{j=1}^{a-2} j = \frac{(a-1)(4n-3a)}{2}.$$

次に $n + 1 \leq a \leq 2n - 2$ のときは、すべての b で上端 $2n$ が先に効くので、個数は

$$\sum_{j=1}^{2n-a-1} j = \frac{(2n-a-1)(2n-a)}{2}$$

である。よって

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{a=2}^n \frac{(a-1)(4n-3a)}{2} + \sum_{a=n+1}^{2n-2} \frac{(2n-a-1)(2n-a)}{2} \\
 &= \frac{n(n-1)^2}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
 &= \frac{n(n-1)(4n-5)}{6}.
 \end{aligned}$$

したがって

$$L - {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(4n-5) - n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{n(n-1)^2}{2} > 0$$

であり、 $L > {}_nC_3$ が従う。

この別解は正確な L まで与えるが、不等式の証明だけなら解法 1 の方が短い。

【総評】 難度 6、計算量 4、想定時間 15 分。公式の出題意図では (2) の正確な L を求める必要はなく、(1) の考えを使って比較に十分な部分集合を作ることが中心である。解法 1 は $n < a < b < c \leq 2n$ の ${}_nC_3$ 個を確保し、そこに含まれない $(2, n, n+1)$ を 1 個加える最短証明である。解法 2 の完全な数え上げは強い検算になり、 $L = n(n-1)(4n-5)/6$ から差が正であることを直接確認できる。