

北海道大学 2026 年度 理系

解答

全 5 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たすとする。

$$a_1 = -8, \quad a_{n+1}(a_n + 1) = 2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) $a_n \neq -2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を示せ。
 (2) $b_n = \frac{1}{a_n + 2}$ とおく。 b_{n+1} を b_n で表せ。
 (3) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【方針】

まず $a_n = -2$ にならないことを、漸化式を逆向きに読む形の帰納法で確認する。これにより $b_n = 1/(a_n + 2)$ がすべての n で定義できる。以後は文系類題と同じく b_n の一次漸化式を作り、固定値 $1/3$ との差を等比数列として解く。

【解答】

(1) $a_1 = -8$ であるから、 $a_1 \neq -2$ である。

ある正の整数 n について $a_n \neq -2$ と仮定する。もし $a_{n+1} = -2$ ならば、漸化式 $a_{n+1}(a_n + 1) = 2$ に代入して $-2(a_n + 1) = 2$ となり、 $a_n = -2$ を得る。これは仮定に反するので、 $a_{n+1} \neq -2$ である。

以上より、数学的帰納法によって $a_n \neq -2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つ。

(2) (1) より $a_n + 2 \neq 0$ であるから、 b_n は定義できる。漸化式から $a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$ であり、

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1} + 2} = \frac{1}{\frac{2}{a_n + 1} + 2} = \frac{a_n + 1}{2(a_n + 2)}$$

となる。さらに $\frac{a_n + 1}{a_n + 2} = 1 - \frac{1}{a_n + 2} = 1 - b_n$ であるから、 $b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ である。

(3) (2) より $b_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}b_n$ である。この漸化式の固定値は $c = \frac{1}{2}(1 - c)$ を満たすので、 $c = \frac{1}{3}$ である。したがって $b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(b_n - \frac{1}{3})$ である。

初項は $b_1 = \frac{1}{a_1 + 2} = \frac{1}{-6} = -\frac{1}{6}$ であるから、 $b_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$ である。よって

$$b_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(-\frac{1}{2} \right)^n$$

となり、 $b_n = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n = \frac{2^n + 3(-1)^n}{3 \cdot 2^n}$ を得る。

したがって

$$a_n = \frac{1}{b_n} - 2 = \frac{3 \cdot 2^n}{2^n + 3(-1)^n} - 2 = \frac{2^n - 6(-1)^n}{2^n + 3(-1)^n}$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 5。想定時間は 10 分程度で、理系受験者には確実に完答したい必答問題である。文系第 2 問と同じ変換が核だが、初項が負であるため、先に $a_n = -2$ とならないことを数学的帰納法で確認し、 b_n の定義を保証する必要がある。この確認を省くと、(2) 以降の変形の根拠が弱くなる。(3) では $b_1 - 1/3 = -1/2$ となるため、文系の場合より符号と係数を誤りやすい。固定値との差を一度明示し、 $(-1/2)^n$ の形まで丁寧に整理することが重要である。

【第 2 問】

関数 $f(x)$ を次によって定める。

$$f(x) = \int_0^x \left\{ \sin(x-t) - \frac{t}{4} \right\}^2 dt$$

次の問いに答えよ。

(1)

$$\int_0^x t \sin(x-t) dt$$

を x の式で表せ。

(2) $f(x)$ を求めよ。

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ を求めよ。

【方針】

被積分関数を展開し、 $\sin^2(x-t)$ 、 $t \sin(x-t)$ 、 t^2 の 3 つの積分に分ける。(1) の積分は $u = x-t$ と置いて計算し、(2) にそのまま利用する。(3) では三角関数を基本極限に分解し、近似記法を使わずに x^3 の係数を求める。

【解答】

(1) $u = x-t$ とおくと、 $t = x-u$ である。 $t=0$ のとき $u=x$ 、 $t=x$ のとき $u=0$ であるから、

$$\int_0^x t \sin(x-t) dt = \int_x^0 (x-u) \sin u (-du) = \int_0^x (x-u) \sin u du$$

となる。

よって

$$\int_0^x (x-u) \sin u du = x \int_0^x \sin u du - \int_0^x u \sin u du$$

である。ここで

$$\int_0^x \sin u du = 1 - \cos x$$

であり、部分積分により

$$\int_0^x u \sin u du = [-u \cos u]_0^x + \int_0^x \cos u du = -x \cos x + \sin x$$

である。したがって

$$\int_0^x t \sin(x-t) dt = x(1 - \cos x) - (-x \cos x + \sin x) = x - \sin x$$

である。

(2) 被積分関数を展開すると

$$\left\{ \sin(x-t) - \frac{t}{4} \right\}^2 = \sin^2(x-t) - \frac{t}{2} \sin(x-t) + \frac{t^2}{16}$$

である。したがって

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(x-t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x t \sin(x-t) dt + \frac{1}{16} \int_0^x t^2 dt$$

となる。

まず $u = x-t$ とおくと

$$\int_0^x \sin^2(x-t) dt = \int_0^x \sin^2 u du$$

であり、 $\sin^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}$ より

$$\int_0^x \sin^2 u du = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

である。また (1) より

$$\int_0^x t \sin(x-t) dt = x - \sin x$$

で、

$$\int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

である。

以上を代入して $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1}{2}(x - \sin x) + \frac{x^3}{48}$ となる。よって $f(x) = \frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x^3}{48}$ である。

(3) (2) の結果を用いる。 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ であるから、

$$\frac{\sin x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{\sin x}{2} - \frac{2 \sin x \cos x}{4} = \frac{\sin x}{2} (1 - \cos x)$$

である。したがって

$$\frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} + \frac{1}{48}$$

となる。

また $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ より $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ である。ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{13}{48}$$

である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度で、理系受験者には完答しておきたい標準からやや発展の問題である。積分そのものは標準的だが、 $x-t$ を含む三角関数と t が混在するため、置換後の積分範囲と符号を丁寧に扱う必要がある。(2) では展開した 3 項を別々に計算し、(1) の結果を確実に利用することが得点の中心である。(3) は近似展開を持ち出さず、 $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ と $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ から基本極限に帰着すると、高校数学の範囲で過不足なく書ける。

【第 3 問】

複素数平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C を考える。次の問いに答えよ。

- (1) C 上の点 α は $|\alpha + \bar{\alpha}| = |\alpha - \bar{\alpha}|$ を満たし、 α の偏角 θ は $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ を満たすとする。 α を求めよ。
- (2) β は虚部が正の複素数で、 $\beta^3 = 1$ を満たすとする。点 z が β を除く C 上を動くとき、 $w(z - \beta) = 1$ を満たす点 w が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

【方針】

前半は $\alpha = x + yi$ とおき、絶対値条件を実部と虚部の関係に直す。後半は $w(z - \beta) = 1$ から $z = \beta + 1/w$ と表し、 $|z| = 1$ を w の条件へ変換する。最後に $w = u + vi$ において直線の方程式を実数成分で読み取る。

【解答】

(1) $\alpha = x + yi$ とおく。 α は半径 1 の円 C 上にあるので $x^2 + y^2 = 1$ である。また $\alpha + \bar{\alpha} = 2x$, $\alpha - \bar{\alpha} = 2yi$ であるから、条件 $|\alpha + \bar{\alpha}| = |\alpha - \bar{\alpha}|$ は $|2x| = |2yi|$ すなわち $|x| = |y|$ である。

偏角 θ が $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ を満たすので、 α は第 2 象限にあり、 $x < 0$, $y > 0$ である。したがって $|x| = |y|$ より $y = -x$ である。これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると $2x^2 = 1$ であり、 $x < 0$ だから $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる。よって $\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ である。

(2) β は虚部が正で $\beta^3 = 1$ を満たす 1 でない 3 乗根であるから、

$$\beta = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

である。

条件 $w(z - \beta) = 1$ より、 $w \neq 0$ であり、 $z = \beta + \frac{1}{w}$ である。点 z は C 上にあるから、 $|\beta + \frac{1}{w}| = 1$ である。両辺に $|w|$ を掛けると $|\beta w + 1| = |w|$ となる。両辺を 2 乗して $(\beta w + 1)(\bar{\beta} \bar{w} + 1) = w \bar{w}$ を得る。ここで $|\beta| = 1$ であるから、左辺を

展開して $w\bar{w}$ を消すと $\beta w + \bar{\beta}\bar{w} + 1 = 0$ となる。 $w = u + vi$ とおく。 $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ であるから、

$$\beta w + \bar{\beta}\bar{w} = 2\operatorname{Re}(\beta w) = -u - \sqrt{3}v$$

である。したがって $-u - \sqrt{3}v + 1 = 0$ すなわち $u + \sqrt{3}v = 1$ を得る。

逆に、直線 $u + \sqrt{3}v = 1$ 上の点 $w = u + vi$ をとる。この直線は原点を通らないので $w \neq 0$ である。また上の計算を逆にたどると $|\beta w + 1| = |w|$ となる。そこで $z = \beta + 1/w$ とおけば $|z| = 1$ であり、 $1/w \neq 0$ だから $z \neq \beta$ でもある。したがって直線上のすべての点 w が実際に得られる。

よって点 w の描く図形は、 $w = u + vi$ としたときの直線 $u + \sqrt{3}v = 1$ 全体である。この直線は実軸と $(1, 0)$ で交わり、虚軸と $(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$ で交わる。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度で、軌跡の必要十分性まで書けるかで差がつく問題である。(1) は確実に得点し、(2) も方針が立てば完答を狙いたい。前半は実部・虚部の比較、後半は複素数平面の軌跡を絶対値条件へ変換する。(1) では偏角の範囲から象限を確定し、 $|x| = |y|$ の符号を決めることが必要である。(2) では $z = \beta + 1/w$ としてから $|z| = 1$ を使うと、円の条件が直線の条件に変わる。方程式を導くだけで終わらず、直線上の各点から許された z が得られる十分性を確認することが採点上重要である。最後の図示では切片を示し、除外点がないことまで明記したい。

【第 4 問】

O を原点とする座標空間に 2 点 $P(1, 0, 3)$, $Q(0, 2, 3)$ をとる。実数 h は $h > 3$ を満たすとし、点 $C(0, 0, h)$ をとる。3 点 C, P, Q を通る平面を α とする。さらに、 α と x 軸との交点を A , α と y 軸との交点を B とおく。四面体 $OABC$ の体積を V とする。次の問いに答えよ。

- (1) A の x 座標を h を用いて表せ。
- (2) V を h を用いて表せ。
- (3) h が $h > 3$ を満たす実数全体を動くとき、 V の最小値を求めよ。

【方針】

平面 α が 3 つの座標軸と交わる点を切片としてもち、 C が z 軸上にあることを利用して切片形で表す。点 P, Q を代入して x 切片と y 切片を h で求めれば、四面体の体積は座標軸上の 3 切片の積から得られる。最後は $h > 3$ の一変数関数として微分し、端で最小をとらないことも含めて確認する。

【解答】

(1) 平面 α は z 軸上の点 $C(0, 0, h)$ を通る。さらに x 軸との交点を A , y 軸との交点を B とするので、 $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, b, 0)$, $C = (0, 0, h)$ とおける。このとき平面 α は切片形で $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{h} = 1$ と表せる。

点 $P(1, 0, 3)$ は α 上にあるから、 $\frac{1}{a} + \frac{3}{h} = 1$ である。したがって $\frac{1}{a} = 1 - \frac{3}{h} = \frac{h-3}{h}$ となり、 $a = \frac{h}{h-3}$ を得る。よって A の x 座標は $\frac{h}{h-3}$ である。

(2) 同様に、点 $Q(0, 2, 3)$ は α 上にあるから、 $\frac{2}{b} + \frac{3}{h} = 1$ である。よって $\frac{2}{b} = \frac{h-3}{h}$ となり、 $b = \frac{2h}{h-3}$ である。

四面体 $OABC$ は 3 つの辺 OA, OB, OC が互いに座標軸方向にあるので、体積は $V = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC$ である。ここで $h > 3$ だから a, b, h はすべて正であり、 $OA = a = \frac{h}{h-3}$, $OB = b = \frac{2h}{h-3}$, $OC = h$ である。したがって

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{h}{h-3} \cdot \frac{2h}{h-3} \cdot h = \frac{h^3}{3(h-3)^2}$$

である。

(3) $V = \frac{h^3}{3(h-3)^2}$ とおく。 $h > 3$ において微分すると、 $V' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3h^2(h-3)^2 - 2h^3(h-3)}{(h-3)^4}$ である。分子を整理して

$V' = \frac{h^2(h-9)}{3(h-3)^3}$ を得る。 $h > 3$ では $h^2 > 0$, $(h-3)^3 > 0$ であるから、 V' の符号は $h-9$ の符号で決まる。したがって $3 < h < 9$ で $V' < 0$, $h > 9$ で $V' > 0$ である。

また、 $h \rightarrow 3+0$ のとき $V \rightarrow \infty$, $h \rightarrow \infty$ のときも $V \rightarrow \infty$ である。よって V は $h = 9$ で最小となる。その値は $V(9) = \frac{9^3}{3 \cdot 6^2} = \frac{729}{108} = \frac{27}{4}$ である。

【総評】 難度 6、計算量 5。想定時間は 11 分程度で、切片形を選ぶかどうかで差がつくが、理系受験者には完答したい問題である。点 C が z 軸上にあり、 A, B も座標軸との交点として定義されているため、平面を $x/a + y/b + z/h = 1$ と置くのが最短である。(1)(2) では切片の符号と四面体の体積公式が採点点となる。(3) では $h > 3$ の範囲で導関数の符号を調べるだけでなく、 $h = 3$ は範囲外であり、端に近づくとき体積が大きくなることを確認すると最小値の議論が明確になる。

【第 5 問】

1 個のさいころを投げる試行を繰り返す。最初の持ち点は 1 とし、3 の目が出たときは持ち点を 3 倍、5 の目が出たときは持ち点を 5 倍、3 と 5 以外の目が出たときは持ち点を 2 倍する。たとえば 3 回試行して出た目が順に 6, 3, 5 のとき、持ち点は $1 \times 2 = 2$, $2 \times 3 = 6$, $6 \times 5 = 30$ と変化し、最後の持ち点は 30 である。次の問いに答えよ。

(1) $n \geq 2$ とする。 n 回試行したとき、最後の持ち点が 4 の倍数となる確率を求めよ。

(2) 持ち点がはじめて 15 以上となったときに試行を終了する。終了するまでに試行した回数の期待値を求めよ。

【方針】

(1) は 3 と 5 以外の目が出た回数だけが 2 の指数を増やすことに注目し、二項分布の余事象で処理する。(2) は 15 未満で到達しうる持ち点をすべて列挙し、それぞれの状態から終了までの期待回数を置く。大きい持ち点から順に計算すれば、連立方程式をほとんど作らずに求められる。

【解答】

(1) 3 と 5 以外の目が出る確率は $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ であり、このとき持ち点は 2 倍される。3 または 5 の目が出る確率は $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ であり、このとき 2 の指数は増えない。 n 回の試行のうち、2 倍される回数を X とする。最後の持ち点が 4 の倍数となるには、2 の指数が 2 以上であればよいので、 $X \geq 2$ であればよい。よって余事象を用いると、求める確率は $1 - P(X = 0) - P(X = 1)$ である。

したがって $P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

$$P(X = 1) = {}_n C_1 \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = n \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

より、

$$1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n - n \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{3^n} - \frac{2n}{3^n} = 1 - \frac{2n+1}{3^n}$$

である。

(2) 持ち点が s の状態から、終了するまでにさらに必要な試行回数の期待値を E_s とする。15 未満で到達しうる持ち点は 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 である。15 以上になった時点で終了するので、次の持ち点が 15 以上なら、その後に必要な回数は 0 として扱う。

まず 8, 9, 10, 12 からは、どの目が出ても次の持ち点は 15 以上になる。したがって $E_8 = E_9 = E_{10} = E_{12} = 1$ である。

次に、持ち点が 6 のとき、2 倍の場合だけ 12 となってまだ終了せず、3 倍または 5 倍では終了する。よって $E_6 = 1 + \frac{2}{3}E_{12} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ である。同様に、持ち点が 5 のときは 2 倍の場合だけ 10 となるので、 $E_5 = 1 + \frac{2}{3}E_{10} = \frac{5}{3}$ である。

持ち点が 4 のときは、2 倍で 8、3 倍で 12、5 倍で 20 となるから、 $E_4 = 1 + \frac{2}{3}E_8 + \frac{1}{6}E_{12} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{11}{6}$ である。

持ち点が 3 のときは、2 倍で 6、3 倍で 9、5 倍で 15 となるから、

$$E_3 = 1 + \frac{2}{3}E_6 + \frac{1}{6}E_9 = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{6} = \frac{41}{18}$$

である。

持ち点が 2 のときは、2 倍で 4、3 倍で 6、5 倍で 10 となるから、 $E_2 = 1 + \frac{2}{3}E_4 + \frac{1}{6}E_6 + \frac{1}{6}E_{10}$ である。これに上で求めた値を代入して $E_2 = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$ を得る。

最後に、初めの持ち点は 1 である。1 からは、2 倍で 2、3 倍で 3、5 倍で 5 となるので、 $E_1 = 1 + \frac{2}{3}E_2 + \frac{1}{6}E_3 + \frac{1}{6}E_5$ である。したがって

$$E_1 = 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{41}{18} + \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{3}$$

であり、通分すると $E_1 = \frac{108 + 192 + 41 + 30}{108} = \frac{371}{108}$ となる。

よって、終了するまでに試行した回数の期待値は $\frac{371}{108}$ である。

【総評】 難度 7、計算量 6。想定時間は 13 分程度で、(2) は本年度の差がつく問題の一つである。時間が厳しい場合でも (1) は必ず確保し、(2) は到達可能な状態を整理できた段階で取り組みたい。(1) は文系第 4 問と同じ発想で、2 の指数だけに注目すればよい。(2) は期待値の状態分類が主題であり、15 未満で到達しうる持ち点を漏れなく列挙できるかが最初の山である。大きい状態から順に計算すれば循環しないので、連立方程式を大きく立てる必要はない。誤りやすい点は、次の持ち点が 15 以上になった場合にもその 1 回の試行は数えること、ただしその後の期待回数は 0 とすることである。