

熊本大学 2017 年度 文系

解答

全 6 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある. ただし, $c > 0$ とする. $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を c を用いて表せ.

(問 2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする. ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき, c の値を求めよ.

(問 3) (問 2) の条件のもとで, 面積 S を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$\angle BAC$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角として内積から求める. 点 $H = (x, y, z)$ をおき, $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{OH}$ などを $A \cdot H = 1$, $B \cdot H = 1$, $C \cdot H = 1$ に直す. 最後は $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$ で面積を求める.

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, c)$$

である. したがって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4, \quad |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{c^2 + 4}$$

より

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}}$$

である. また $0 < \theta < \pi$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{5c^2 + 16}}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}}$$

である.

(問 2) $H = (x, y, z)$ とおく. $|\overrightarrow{OH}| = 1$ であり, $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{OH}$ より

$$(A - H) \cdot H = 0$$

であるから, $A \cdot H = |H|^2 = 1$ である. 同様に $B \cdot H = 1$, $C \cdot H = 1$ である. よって

$$2x = 1, \quad 4y = 1, \quad cz = 1$$

となる. さらに $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ より

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{c^2} = 1$$

である. したがって $\frac{1}{c^2} = \frac{11}{16}$ であり, $c > 0$ だから

$$c = \frac{4\sqrt{11}}{11}$$

である.

(問 3) 三角形の面積は

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$$

である. 問 1 の結果を代入すると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{c^2 + 4} \cdot \frac{\sqrt{5c^2 + 16}}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}} = \sqrt{5c^2 + 16}$$

である。(問 2) より $c^2 = \frac{16}{11}$ なので

$$S = \sqrt{\frac{80}{11} + 16} = \frac{16\sqrt{11}}{11}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

面積は外積で、球面条件は平面 ABC と原点の距離で処理する。点 H の条件から ABC の平面が $H \cdot X = 1$ と表せることを利用する。

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, c)$$

より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4c, 2c, 8)$$

である。したがって

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}}, \\ \sin \theta &= \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{5c^2 + 16}}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}} \end{aligned}$$

である。

(問 2) 条件から

$$(A - H) \cdot H = (B - H) \cdot H = (C - H) \cdot H = 0$$

であり、 $|H| = 1$ だから

$$A \cdot H = B \cdot H = C \cdot H = 1$$

となる。よって平面 ABC は $H \cdot X = 1$ であり、原点からこの平面までの距離は $1/|H| = 1$ である。

一方、平面 ABC の切片形は

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{c} = 1$$

だから、原点との距離は

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{c^2}}}$$

である。これが 1 に等しいので

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{c^2} = 1$$

となり、

$$c = \frac{4\sqrt{11}}{11}$$

を得る。

(問 3) 外積から

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(4c)^2 + (2c)^2 + 8^2} = \sqrt{5c^2 + 16}$$

である。 $c^2 = 16/11$ を代入して

$$S = \frac{16\sqrt{11}}{11}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 12 分程度。内積による角度計算と、 $(A - H) \cdot H = 0$ を $A \cdot H = 1$ に直すところが得点の中心である。球面条件を入れ忘れると c が決まらないため、 $|OH| = 1$ を明示することが重要である。位置づけは差がつく標準問題であり、方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。

【第 1 問】

原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある. ただし, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする. $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を a , b , c を用いて表せ.

(問 2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする. ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$ が成り立つことを示せ.

(問 3) (問 2) の条件のもとで, $a = 3$ としたとき, 面積 S の最小値とそのときの b , c の値を求めよ.

(編注) 2021 年名古屋市立大中期薬学部で改変して活用

▶ 解法 1

【方針】

(問 1)(問 2) は座標成分で内積条件を処理する.(問 3) では $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin \theta$ から S^2 を b^2, c^2 で表し, 条件 $1/b^2 + 1/c^2 = 8/9$ を用いて $b^2 + c^2$ の下限を出す. 等号成立条件から $b = c$ を決める.

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

である. よって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2, \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

より

$$\cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + c^2}}$$

である. また $0 < \theta < \pi$ であるから

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + c^2}}$$

である.

(問 2) $H = (x, y, z)$ とおく. $|\overrightarrow{OH}| = 1$ であり, $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{OH}$ より

$$(A - H) \cdot H = 0$$

である. したがって $A \cdot H = 1$ であり, 同様に $B \cdot H = 1$, $C \cdot H = 1$ である. よって

$$ax = 1, \quad by = 1, \quad cz = 1$$

である. これを $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ に代入して

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

を得る.

(問 3) 問 1 より

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin \theta$$

であるから

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$$

である. $a = 3$ のとき, (問 2) の条件は

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}$$

である. $x = b^2$, $y = c^2$ とおくと

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{8}{9}$$

すなわち $xy = \frac{9}{8}(x + y)$ である. したがって

$$S^2 = \frac{1}{4}\{9(x + y) + xy\} = \frac{81}{32}(x + y)$$

である。

一方, $(x-y)^2 \geq 0$ より $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ である。 $xy = \frac{9}{8}(x+y)$ を用いると

$$\frac{9}{8}(x+y) \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

であり, $x+y > 0$ だから $x+y \geq \frac{9}{2}$ である。 よって

$$S^2 \geq \frac{81}{32} \cdot \frac{9}{2} = \frac{729}{64}$$

である。等号は $x=y$ のとき成立し, このとき $x=y=\frac{9}{4}$ である。したがって

$$S_{\min} = \frac{27}{8}, \quad b=c=\frac{3}{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

角と面積は外積で処理し, 球面条件は切片形の平面と原点の距離として読む。最小化では $1/b^2, 1/c^2$ を変数にして積を最大化する。

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

であり,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab)$$

である。よって

$$\cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}}$$

である。

(問 2) 点 H の条件から平面 ABC は $H \cdot X = 1$ と表され, $|H| = 1$ なので原点から平面までの距離は 1 である。一方, 切片形

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

から距離は

$$\frac{1}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2}}$$

である。よって

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

を得る。

(問 3) $u = 1/b^2, v = 1/c^2$ とおくと, $a = 3$ では

$$u + v = \frac{8}{9}$$

である。外積から

$$S^2 = \frac{1}{4}(9b^2 + 9c^2 + b^2 c^2) = \frac{9(u+v)+1}{4uv} = \frac{9}{4uv}$$

となる。相加・相乗平均より

$$uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

だから

$$S^2 \geq \frac{729}{64}.$$

等号は $u = v = 4/9$ のときであり,

$$S_{\min} = \frac{27}{8}, \quad b = c = \frac{3}{2}$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 想定時間は 22 分程度。前半は空間ベクトルの成分計算だが, 後半は条件式を b^2, c^2 に移して最小化する整理力が問われる。 S ではなく S^2 を最小化し, 等号成立条件 $b^2 = c^2$ から正の値を選ぶことが重要である。位置づけは差がつく難問であり, 前半を確保したうえで時間次第では後半を見送り候補にする。

【第 2 問】

n は 5 以上の自然数とする。赤玉 3 個と白玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し, 色を確認してからもとに戻すという試行を n 回行う。以下の問いに答えよ。

(問 1) n 回目に 3 度目の赤玉が出る確率を求めよ。

(問 2) 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出る確率を求めよ。

(問 3) n 回目に 3 度目の赤玉が出たとき, 2 度以上連続することなく 3 度赤玉が出ている条件付き確率を求めよ。

(編注) 2022 年札幌医科大学前期で改変して活用

▶ 解法 1

【方針】

赤玉の出る確率を $p = \frac{3}{10}$, 白玉の出る確率を $q = \frac{7}{10}$ とする。(問 1) は最初の $n-1$ 回に赤がちょうど 2 回出て, 最後が赤である事象を数える。(問 2) は隣り合わない 3 個の位置の選び方を数える。(問 3) は (問 1) を条件に, 最後の赤と連続しないように $n-1$ 回目が白になる位置条件を数える。

【解答】

(問 1) 赤玉の出る確率を $p = \frac{3}{10}$, 白玉の出る確率を $q = \frac{7}{10}$ とする。 n 回目に 3 度目の赤玉が出るには, 最初の $n-1$ 回に赤玉がちょうど 2 回出て, n 回目に赤玉が出ればよい。したがって求める確率は

$${}_{n-1}C_2 p^3 q^{n-3} = {}_{n-1}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}$$

である。

(問 2) n 回のうち赤玉が出る 3 回の位置を, 隣り合わないように選ぶ。 n 個の位置から隣り合わない 3 個を選ぶ方法は

$${}_{n-2}C_3$$

通りである。よって求める確率は

$${}_{n-2}C_3 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}$$

である。

(問 3) 事象 A を「 n 回目に 3 度目の赤玉が出る」とする。 A のもとでは, 最初の $n-1$ 回のうち赤玉が出る位置を 2 個選ぶので, その選び方は ${}_{n-1}C_2$ 通りである。

さらに赤玉が連続しないためには, $n-1$ 回目は白玉であり, 最初の $n-2$ 回の中で赤玉が出る 2 個の位置が隣り合わなければよい。この選び方は

$${}_{n-3}C_2$$

通りである。各位置の出方の確率因子は同じなので, 求める条件付き確率は

$$\frac{{}_{n-3}C_2}{{}_{n-1}C_2} = \frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

赤が連続しない並びを、白玉の間にできる隙間へ赤玉を置く方法で数える。条件付き確率では最後が赤であることを固定して、同じ隙間法を用いる。

【解答】

(問 1) 赤を R 、白を W と書く。 n 回目が 3 回目の R であるには、最初の $n-1$ 箇所から R の位置を 2 個選ばばよい。したがって

$${}_{n-1}C_2 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}$$

である。

(問 2) まず $n-3$ 個の W を並べると、その前後と間に

$$n-2$$

個の隙間ができる。 R が連続しないためには、異なる 3 個の隙間に R を 1 個ずつ置けばよい。よって並びは ${}_{n-2}C_3$ 通りであり、確率は

$${}_{n-2}C_3 \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^{n-3}$$

である。

(問 3) 「 n 回目が 3 回目の赤」である並びは、最初の $n-1$ 箇所から赤の位置を 2 個選ぶので ${}_{n-1}C_2$ 通りである。

さらに赤が連続しないなら $n-1$ 回目は白である。最初の $n-2$ 回には赤 2 個、白 $n-4$ 個があり、白を並べたときの $n-3$ 個の隙間から 2 個を選ぶので、有利な並びは ${}_{n-3}C_2$ 通りである。したがって条件付き確率は

$$\frac{{}_{n-3}C_2}{{}_{n-1}C_2} = \frac{(n-3)(n-4)}{(n-1)(n-2)}$$

である。

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 12 分程度。確率そのものより、赤玉の位置を正しく数える問題である。(問 3) では条件付き確率の分母を (問 1) の位置数 ${}_{n-1}C_2$ とし、 $n-1$ 回目が白でなければならない点を落とさないことが重要である。位置づけは差がつく標準問題であり、方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。

【第 3 問】

$f(x) = x^2 + x$ とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。 $a_1 = 8$ とする。 a_n ($n \geq 1$) に対して、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $((a_n)^2, f((a_n)^2))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし、 $(a_n)^2$ は a_n の 2 乗を表す。以下の問いに答えよ。

(問 1) すべての自然数 n に対し、 $a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(問 2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくと、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

接点の x 座標を $u = (a_n)^2$ とおき、 $y = x^2 + x$ の接線と $y = x$ の交点を計算して $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$ を得る。正值性はこの漸化式から帰納的に示す。 $b_n = \log_2 a_n$ により一次漸化式 $b_{n+1} = 2b_n - 1$ へ直し、 $b_n - 1$ を等比数列として解く。

【解答】

(問 1) $u = (a_n)^2$ とおく。 $f'(x) = 2x + 1$ であるから、曲線 $y = f(x)$ の点 $(u, f(u))$ における接線は

$$y = (2u + 1)(x - u) + u^2 + u = (2u + 1)x - u^2$$

である。これと $y = x$ の交点の x 座標は

$$x = (2u + 1)x - u^2$$

より, $u > 0$ のとき $x = \frac{u}{2}$ である。したがって

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$$

である。 $a_1 = 8 > 0$ であり, $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2} > 0$ であるから, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つ。

(問 2) $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$ より

$$b_{n+1} = \log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^2}{2} = 2 \log_2 a_n - 1 = 2b_n - 1$$

である。

(問 3) $b_1 = \log_2 8 = 3$ である。(問 2) より

$$b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$$

であるから, $b_n - 1$ は初項 2, 公比 2 の等比数列である。よって

$$b_n - 1 = 2^n$$

すなわち $b_n = 2^n + 1$ である。したがって

$$a_n = 2^{2^n + 1}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

接線計算から得た $a_{n+1} = a_n^2/2$ に対し, 対数漸化式を固定点移動せず反復する。最後は得られた一般項を元の漸化式へ代入して帰納的にも確認する。

【解答】

(問 1) $u = a_n^2$ とおくと, 接線は

$$y = (2u + 1)x - u^2$$

である。 $y = x$ との交点では

$$2ux = u^2$$

となるので, $u > 0$ なら

$$a_{n+1} = \frac{u}{2} = \frac{a_n^2}{2} > 0$$

である。 $a_1 = 8 > 0$ から帰納的にすべての a_n は正である。

(問 2)

$$b_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^2}{2} = 2b_n - 1$$

である。

(問 3) $b_1 = 3$ であり, 漸化式を繰り返すと

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{n-1}b_1 - (1 + 2 + \cdots + 2^{n-2}) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n + 1 \end{aligned}$$

となる。よって

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{2^n + 1}$$

である。実際, この式は $a_1 = 8$ を満たし, $a_n^2/2 = a_{n+1}$ となる。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 15 分程度。接線と直線 $y = x$ の交点から漸化式を正確に作ることが最重要である。 $a_{n+1} = a_n^2/2$ が出れば, 対数を取って一次漸化式に落とす流れは標準的で, 指数の添字を一つずらさないように注意したい。位置づけは差がつく標準問題であり, 方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。

【第 4 問】

t は 0 でない実数とする。座標平面上の曲線 $C_1: y = (x-t)^2 + 2t^3 - t^2$ と曲線 $C_2: y = 2x^3 - x^2$ について、以下の問いに答えよ。

(問 1) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点が 2 個になるような t を求めよ。

(問 2) t を (問 1) で求めた値とし、曲線 C_1 と曲線 C_2 の共有点を A, B とする。ただし、点 A の x 座標は、点 B の x 座標より小さいとする。このとき、点 A, B における曲線 C_2 の接線 l_A, l_B と曲線 C_1 で囲まれた部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

共有点の x 座標は三次方程式で決まり、常に $x = t$ を根にもつ。二次因子の判別式と重なりを調べて共有点が 2 個になる t を決める。 $t = -1$ を代入して 2 つの共有点と C_2 の接線を求め、接線同士の交点を境に積分区間を分けて面積を計算する。

【解答】

(問 1) 共有点の x 座標は

$$(x-t)^2 + 2t^3 - t^2 = 2x^3 - x^2$$

を満たす。整理すると

$$2\{x^3 - x^2 + tx - t^3\} = 0$$

であり、

$$x^3 - x^2 + tx - t^3 = (x-t)\{x^2 + (t-1)x + t^2\}$$

である。

二次方程式 $x^2 + (t-1)x + t^2 = 0$ の判別式を D とすると

$$D = (t-1)^2 - 4t^2 = -(3t-1)(t+1)$$

である。また $x = t$ がこの二次方程式の根にもなるのは

$$t^2 + (t-1)t + t^2 = t(3t-1) = 0$$

より、 $t \neq 0$ だから $t = \frac{1}{3}$ のときである。

共有点が 2 個になるには、二次方程式が重解をもち、その重解が $x = t$ と異なればよい。 $D = 0$ より $t = \frac{1}{3}, -1$ であるが、 $t = \frac{1}{3}$ では重解が $x = t$ と一致する。したがって

$$t = -1$$

である。

(問 2) $t = -1$ のとき

$$C_1: y = x^2 + 2x - 2, \quad C_2: y = 2x^3 - x^2$$

である。共有点の x 座標は $-1, 1$ であるから

$$A(-1, -3), \quad B(1, 1)$$

である。 C_2 の導関数は $y' = 6x^2 - 2x$ であるから、接線は

$$l_A: y = 8x + 5, \quad l_B: y = 4x - 3$$

である。 l_A と l_B の交点は $(-2, -11)$ である。

求める面積は、 $-2 \leq x \leq -1$ では l_A と l_B の差、 $-1 \leq x \leq 1$ では C_1 と l_B の差を積分すればよい。したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} \{(8x+5) - (4x-3)\} dx + \int_{-1}^1 \{(x^2+2x-2) - (4x-3)\} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} (4x+8) dx + \int_{-1}^1 (x-1)^2 dx \\ &= 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

共有点方程式を一次因子と二次因子に分け、根の重なりを集合として数える。面積は各境界の差を先に平方・一次式へ因数分解してから積分する。

【解答】

(問 1) 共有点の条件は

$$(x-t)\{x^2+(t-1)x+t^2\}=0$$

である。二次因子の判別式は

$$D=-(3t-1)(t+1)$$

であり、 $x=t$ が二次因子の根になる条件は

$$t(3t-1)=0$$

である。

異なる共有点が 2 個になるには、二次因子が重解をもち、その重解が t と異なればよい。 $D=0$ から $t=1/3, -1$ を得るが、 $t=1/3$ ではすべての根が $x=t$ に重なる。したがって

$$t=-1$$

である。

(問 2) $t=-1$ のとき

$$C_1: y=x^2+2x-2$$

で、共有点は $A(-1, -3), B(1, 1)$ である。 C_2 の接線は

$$l_A: y=8x+5, \quad l_B: y=4x-3$$

で、その交点の x 座標は -2 である。

境界の差は

$$l_A-l_B=4(x+2), \quad C_1-l_B=(x-1)^2$$

と簡単に表せる。したがって

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{-1} 4(x+2) dx + \int_{-1}^1 (x-1)^2 dx \\ &= 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 7。想定時間は 25 分程度。(問 1) は三次式の因数分解後、判別式だけでなく $x=t$ と二次因子の根が重なる場合を確認する必要がある。(問 2) は囲まれた領域の上端が途中で変わるため、積分区間を $[-2, -1]$ と $[-1, 1]$ に分けることが主な採点ポイントである。位置づけは差がつく難問であり、前半を確保したうえで時間次第では後半を見送り候補にする。

【第 4 問】

$f(x) = x^2 + x$ とし, j は自然数とする. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. $a_1 = 2$ とする. a_n ($n \geq 1$) に対して, 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $((a_n)^j, f((a_n)^j))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする. ただし, $(a_n)^j$ は a_n の j 乗を表す. 以下の問いに答えよ.

(問 1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 0$ が成り立つことを示せ.

(問 2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくと, b_{n+1} を b_n を用いて表せ.

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

接点の x 座標を $u = (a_n)^j$ として, 接線と $y = x$ の交点から $a_{n+1} = a_n^j/2$ を得る. 対数を取ると $b_{n+1} = jb_n - 1$ となる. $j = 1$ と $j \neq 1$ で一次漸化式の解き方が分かれるため, 最後に場合分けして a_n へ戻す.

【解答】

(問 1) $u = (a_n)^j$ とおく. $f'(x) = 2x + 1$ であるから, 曲線 $y = f(x)$ の点 $(u, f(u))$ における接線は

$$y = (2u + 1)(x - u) + u^2 + u = (2u + 1)x - u^2$$

である. これと $y = x$ の交点の x 座標は

$$x = (2u + 1)x - u^2$$

より $x = \frac{u}{2}$ である. したがって

$$a_{n+1} = \frac{a_n^j}{2}$$

である. $a_1 = 2 > 0$ であり, $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} > 0$ であるから, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つ.

(問 2) (問 1) より

$$b_{n+1} = \log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^j}{2} = j \log_2 a_n - 1 = jb_n - 1$$

である.

(問 3) $b_1 = \log_2 2 = 1$ である.

$j = 1$ のとき, (問 2) より $b_{n+1} = b_n - 1$ であるから

$$b_n = 2 - n$$

である. したがって

$$a_n = 2^{2-n}$$

である.

$j \neq 1$ のとき,

$$b_{n+1} - \frac{1}{j-1} = j \left(b_n - \frac{1}{j-1} \right)$$

である. よって

$$b_n - \frac{1}{j-1} = j^{n-1} \left(1 - \frac{1}{j-1} \right)$$

となり,

$$b_n = \frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}$$

である. したがって

$$a_n = 2^{\frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}}$$

である.

▶ 解法 2

【方針】

接線から $a_{n+1} = a_n^j/2$ を得て対数を取り，得られた一次漸化式を反復代入と等比和で解く。 $j = 1$ だけは先に分ける。

【解答】

(問 1) $u = a_n^j$ とおくと接線は $y = (2u + 1)x - u^2$ であり， $y = x$ との交点から

$$a_{n+1} = \frac{u}{2} = \frac{a_n^j}{2}$$

を得る。 $a_1 = 2 > 0$ なので，帰納的に $a_n > 0$ である。

(問 2)

$$b_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^j}{2} = jb_n - 1$$

である。

(問 3) $b_1 = 1$ である。 $j = 1$ なら $b_n = 2 - n$ だから

$$a_n = 2^{2-n}$$

である。 $j \neq 1$ なら反復代入して

$$b_n = j^{n-1} - \sum_{r=0}^{n-2} j^r = \frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}$$

となる。よって

$$a_n = 2^{\frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}}$$

である。

【総評】 難度 6，計算量 5。想定時間は 18 分程度。接線計算自体は標準的だが， j を含むため最後の一次漸化式で $j = 1$ を別扱いする必要がある。 $j = 2$ のときにも式が正しく一定列を与えるか確認すると，添字ミスを発見しやすい。位置づけは差がつく標準問題であり，方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。