

入 学 試 験 問 題

数 学



熊 本 大 学 2017 年 度 理 系

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 12 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある. ただし, $c > 0$ とする. $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を c を用いて表せ.

(問 2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする. ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき, c の値を求めよ.

(問 3) (問 2) の条件のもとで, 面積 S を求めよ.

第 1 問

原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある. ただし, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする. $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を a , b , c を用いて表せ.

(問 2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする. ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$ が成り立つことを示せ.

(問 3) (問 2) の条件のもとで, $a = 3$ としたとき, 面積 S の最小値とそのときの b , c の値を求めよ.

(編注) 2021 年名古屋市立大中期薬学部で改変して活用

第 1 問

半径 1 の円に外接する $\triangle ABC$ について、 $\angle CAB = 2x$, $\angle ABC = 2y$, $\angle BCA = 2z$ とする。
 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、以下の問いに答えよ。

(問 1) $S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ。

(問 2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき、 S の最小値とそのときの x , y を求めよ。

第 2 問

$s > 0$, $t > 0$ とする. 複素数平面上の $\alpha = -i$, $\beta = 2 - 2i$, $\gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A , B , C とする. さらに, 点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり, $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする. 点 D を表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) z を s , t を用いて表せ.

(問 2) α , β , γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき, γ と z をそれぞれ求めよ.

(問 3) (問 2) で求めた γ と z に対して, 直線 AC と直線 BD の交点を F とし, $\angle DFC = \theta$ とする. このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ.

第 2 問

$s > 0, t > 0$ とする. 原点を O とする複素数平面において, $\alpha = 2 - i, \beta = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B とする. さらに, 点 C を直線 OB に関して点 A と反対側にとり, $\triangle OBC$ が正三角形になるようにする. 点 C を表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) z を s, t を用いて表せ.

(問 2) α, β が等式 $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$ を満たすとき, β と z をそれぞれ求めよ.

(問 3) (問 2) で求めた β と z に対して, 直線 AC と直線 OB の交点を D とし, $\angle CDB = \theta$ とする. このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ.

第 3 問

$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ ($x > 0$) とする. 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし, 点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における曲線 C の接線を l とする. 以下の問いに答えよ.

(問 1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ.

(問 2) (問 1) で求めた t の値を a とする. 実数 k に対し, 直線 $l_k: y = k(x - a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ.

(問 3) (問 2) の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき, それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\frac{1}{3}$ となるような k を求め, そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ.

第 3 問

$f(x) = x^2 + x$ とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める． $a_1 = 8$ とする． a_n ($n \geq 1$) に対して，座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $((a_n)^2, f((a_n)^2))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする．ただし， $(a_n)^2$ は a_n の 2 乗を表す．以下の問いに答えよ．

(問 1) すべての自然数 n に対し， $a_n > 0$ が成り立つことを示せ．

(問 2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき， b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

第 3 問

関数 $f(x) = \log_2 x - x + 1$ ($x > 0$) について、以下の問いに答えよ.

(問 1) $f(x)$ の極値を求めよ.

(問 2) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ. なお, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ を用いてもよい.

(問 3) 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

第 4 問

n は 2 以上の自然数とする. 1 から $2n$ までの自然数の順列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ に対して, 分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \dots + \frac{a_n}{a_{2n}}$$

を考える. 1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対してこの和がとり得る値の最大値を S_n とする. 以下の問いに答えよ.

(問 1) S_2 を求めよ.

(問 2) S_n を与える順列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ の例を 1 つ挙げ, その理由を述べよ.

(問 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n}$ を求めよ.

第 4 問

$f(x) = x^2 + x$ とし, j は自然数とする. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. $a_1 = 2$ とする. a_n ($n \geq 1$) に対して, 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $((a_n)^j, f((a_n)^j))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする. ただし, $(a_n)^j$ は a_n の j 乗を表す. 以下の問いに答えよ.

(問 1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 0$ が成り立つことを示せ.

(問 2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくとき, b_{n+1} を b_n を用いて表せ.

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)