

熊本大学 2017 年度 理系

解答

全 10 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある. ただし, $c > 0$ とする. $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を c を用いて表せ.

(問 2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする. ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき, c の値を求めよ.

(問 3) (問 2) の条件のもとで, 面積 S を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$\angle BAC$ は $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角として内積から求める. 点 $H = (x, y, z)$ をおき, $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{OH}$ などを $A \cdot H = 1$, $B \cdot H = 1$, $C \cdot H = 1$ に直す. 最後は $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$ で面積を求める.

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, c)$$

である. したがって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4, \quad |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{c^2 + 4}$$

より

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}}$$

である. また $0 < \theta < \pi$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{5c^2 + 16}}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}}$$

である.

(問 2) $H = (x, y, z)$ とおく. $|\overrightarrow{OH}| = 1$ であり, $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{OH}$ より

$$(A - H) \cdot H = 0$$

であるから, $A \cdot H = |H|^2 = 1$ である. 同様に $B \cdot H = 1$, $C \cdot H = 1$ である. よって

$$2x = 1, \quad 4y = 1, \quad cz = 1$$

となる. さらに $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ より

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{c^2} = 1$$

である. したがって $\frac{1}{c^2} = \frac{11}{16}$ であり, $c > 0$ だから

$$c = \frac{4\sqrt{11}}{11}$$

である.

(問 3) 三角形の面積は

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta$$

である. 問 1 の結果を代入すると

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{c^2 + 4} \cdot \frac{\sqrt{5c^2 + 16}}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}} = \sqrt{5c^2 + 16}$$

である。(問 2) より $c^2 = \frac{16}{11}$ なので

$$S = \sqrt{\frac{80}{11} + 16} = \frac{16\sqrt{11}}{11}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

面積は外積で、球面条件は平面 ABC と原点の距離で処理する。点 H の条件から ABC の平面が $H \cdot X = 1$ と表せることを利用する。

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 4, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, c)$$

より

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (4c, 2c, 8)$$

である。したがって

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}},$$

$$\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\sqrt{5c^2 + 16}}{\sqrt{5}\sqrt{c^2 + 4}}$$

である。

(問 2) 条件から

$$(A - H) \cdot H = (B - H) \cdot H = (C - H) \cdot H = 0$$

であり、 $|H| = 1$ だから

$$A \cdot H = B \cdot H = C \cdot H = 1$$

となる。よって平面 ABC は $H \cdot X = 1$ であり、原点からこの平面までの距離は $1/|H| = 1$ である。

一方、平面 ABC の切片形は

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{c} = 1$$

だから、原点との距離は

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{c^2}}}$$

である。これが 1 に等しいので

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{c^2} = 1$$

となり、

$$c = \frac{4\sqrt{11}}{11}$$

を得る。

(問 3) 外積から

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(4c)^2 + (2c)^2 + 8^2} = \sqrt{5c^2 + 16}$$

である。 $c^2 = 16/11$ を代入して

$$S = \frac{16\sqrt{11}}{11}$$

である。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 12 分程度。内積による角度計算と、 $(A - H) \cdot H = 0$ を $A \cdot H = 1$ に直すところが得点の中心である。球面条件を入れ忘れると c が決まらないため、 $|OH| = 1$ を明示することが重要である。位置づけは差がつく標準問題であり、方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。

【第 1 問】

原点を O とする座標空間内に 3 点 $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ がある. ただし, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ とする. $\angle BAC = \theta$ とし, $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) $\cos \theta$, $\sin \theta$ を a , b , c を用いて表せ.

(問 2) 点 O を中心とする半径 1 の球面上の点を H とする. ベクトル $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HC}$ がいずれもベクトル $\overrightarrow{OH}$ に垂直であるとき, $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$ が成り立つことを示せ.

(問 3) (問 2) の条件のもとで, $a = 3$ としたとき, 面積 S の最小値とそのときの b , c の値を求めよ.

(編注) 2021 年名古屋市立大中期薬学部で改変して活用

▶ 解法 1

【方針】

(問 1)(問 2) は座標成分で内積条件を処理する.(問 3) では $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin \theta$ から S^2 を b^2, c^2 で表し, 条件 $1/b^2 + 1/c^2 = 8/9$ を用いて $b^2 + c^2$ の下限を出す. 等号成立条件から $b = c$ を決める.

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

である. よって

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2, \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

より

$$\cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + c^2}}$$

である. また $0 < \theta < \pi$ であるから

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{a^2 + c^2}}$$

である.

(問 2) $H = (x, y, z)$ とおく. $|\overrightarrow{OH}| = 1$ であり, $\overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{OH}$ より

$$(A - H) \cdot H = 0$$

である. したがって $A \cdot H = 1$ であり, 同様に $B \cdot H = 1$, $C \cdot H = 1$ である. よって

$$ax = 1, \quad by = 1, \quad cz = 1$$

である. これを $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ に代入して

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

を得る.

(問 3) 問 1 より

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin \theta$$

であるから

$$S^2 = \frac{1}{4}(a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2)$$

である. $a = 3$ のとき, (問 2) の条件は

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{8}{9}$$

である. $x = b^2$, $y = c^2$ とおくと

$$\frac{x + y}{xy} = \frac{8}{9}$$

すなわち $xy = \frac{9}{8}(x + y)$ である. したがって

$$S^2 = \frac{1}{4}\{9(x + y) + xy\} = \frac{81}{32}(x + y)$$

である。

一方, $(x-y)^2 \geq 0$ より $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ である。 $xy = \frac{9}{8}(x+y)$ を用いると

$$\frac{9}{8}(x+y) \leq \frac{(x+y)^2}{4}$$

であり, $x+y > 0$ だから $x+y \geq \frac{9}{2}$ である。 よって

$$S^2 \geq \frac{81}{32} \cdot \frac{9}{2} = \frac{729}{64}$$

である。等号は $x=y$ のとき成立し, このとき $x=y=\frac{9}{4}$ である。したがって

$$S_{\min} = \frac{27}{8}, \quad b=c=\frac{3}{2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

角と面積は外積で処理し, 球面条件は切片形の平面と原点の距離として読む。最小化では $1/b^2, 1/c^2$ を変数にして積を最大化する。

【解答】

(問 1)

$$\overrightarrow{AB} = (-a, b, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-a, 0, c)$$

であり,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (bc, ac, ab)$$

である。よって

$$\cos \theta = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a^2 + c^2}}$$

である。

(問 2) 点 H の条件から平面 ABC は $H \cdot X = 1$ と表され, $|H| = 1$ なので原点から平面までの距離は 1 である。一方, 切片形

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

から距離は

$$\frac{1}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2 + 1/c^2}}$$

である。よって

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1$$

を得る。

(問 3) $u = 1/b^2, v = 1/c^2$ とおくと, $a = 3$ では

$$u + v = \frac{8}{9}$$

である。外積から

$$S^2 = \frac{1}{4}(9b^2 + 9c^2 + b^2 c^2) = \frac{9(u+v)+1}{4uv} = \frac{9}{4uv}$$

となる。相加・相乗平均より

$$uv \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

だから

$$S^2 \geq \frac{729}{64}.$$

等号は $u = v = 4/9$ のときであり,

$$S_{\min} = \frac{27}{8}, \quad b = c = \frac{3}{2}$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 6. 想定時間は 22 分程度。前半は空間ベクトルの成分計算だが, 後半は条件式を b^2, c^2 に移して最小化する整理力が問われる。 S ではなく S^2 を最小化し, 等号成立条件 $b^2 = c^2$ から正の値を選ぶことが重要である。位置づけは差がつく難問であり, 前半を確保したうえで時間次第では後半を見送り候補にする。

【第 1 問】

半径 1 の円に外接する $\triangle ABC$ について, $\angle CAB = 2x$, $\angle ABC = 2y$, $\angle BCA = 2z$ とする. $\triangle ABC$ の面積を S とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) $S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$ が成り立つことを示せ.

(問 2) $z = \frac{\pi}{6}$ のとき, S の最小値とそのときの x, y を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

内接円の半径が 1 であるから, 面積 S は半周長に等しい。各頂点から接点までの接線の長さを, 角の半分と接円半径から $\cot x, \cot y, \cot z$ と表す。(問 2) では $x + y = \pi/3$ のもとで $\cot x + \cot y$ を最小化し, $\sin x \sin y$ が最大となる条件を用いる。

【解答】

(問 1) 内接円の中心を I とし, AB と内接円の接点を P とする。半径が 1 であるから, 直角三角形 AIP において

$$AP = \frac{1}{\tan x}$$

である。同様に, 各頂点から接点までの接線の長さは

$$\frac{1}{\tan x}, \quad \frac{1}{\tan y}, \quad \frac{1}{\tan z}$$

である。

よって三角形の半周長は

$$\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

である。一方, 内接円の半径が 1 なので, 面積は半周長に等しい。したがって

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

である。

(問 2) $2x + 2y + 2z = \pi$ であり, $z = \frac{\pi}{6}$ だから

$$x + y = \frac{\pi}{3}$$

である。(問 1) より

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \sqrt{3}$$

である。また

$$\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \sin y} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sin x \sin y}$$

である。

ここで

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} = \frac{\cos(x-y) - 1/2}{2}$$

であるから、 $x + y = \frac{\pi}{3}$ のもとで $\sin x \sin y$ は $x = y = \frac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。したがって

$$\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} \geq 2\sqrt{3}$$

であり、

$$S \geq 3\sqrt{3}$$

である。等号は $x = y = \frac{\pi}{6}$ のとき成立する。よって最小値は

$$3\sqrt{3}$$

であり、そのとき

$$x = y = \frac{\pi}{6}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

面積を内接円で 3 つの三角形に分割して半周長と結びつける。(問 2) は $\cot x$ の凸性に対する中点評価で最小化する。

【解答】

(問 1) 各頂点から内接円への接線長をそれぞれ u, v, w とする。内接円の半径が 1 なので

$$S = \frac{1}{2}\{(u+v) + (v+w) + (w+u)\} = u+v+w$$

である。

頂点 A の角は $2x$ である。角の二等分線と接点を含む直角三角形を見れば

$$u = \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

であり、同様に $v = \cot y$, $w = \cot z$ である。よって

$$S = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} + \frac{1}{\tan z}$$

である。

(問 2) $z = \pi/6$ より

$$x + y = \frac{\pi}{3}$$

である。 $0 < u < \pi/2$ で

$$(\cot u)'' = 2 \cot u \csc^2 u > 0$$

だから、 $\cot u$ は下に凸である。したがって中点における凸性から

$$\cot x + \cot y \geq 2 \cot \frac{x+y}{2} = 2 \cot \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

である。さらに $\cot z = \sqrt{3}$ なので

$$S \geq 3\sqrt{3}.$$

等号は $x = y = \pi/6$ のとき成立する。

【総評】 難度 5, 計算量 4. 想定時間は 15 分程度。内接円の半径と半周長から面積を出す標準事実を、接線長 $\cot x$ と結びつける問題である。(問 2) は $x + y = \pi/3$ を使って $\sin x \sin y$ を最大化すればよく、端に近づくと面積は大きくなる点も確認しておきたい。位置づけは差がつく標準問題であり、方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。

【第 2 問】

$s > 0, t > 0$ とする. 複素数平面上の $\alpha = -i, \beta = 2 - 2i, \gamma = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする. さらに, 点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり, $\triangle ACD$ が正三角形になるようにする. 点 D を表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ.

(問 1) z を s, t を用いて表せ.

(問 2) α, β, γ が等式 $4(\beta - \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2 - 2(\beta - \alpha)(\gamma - \alpha) = 0$ を満たすとき, γ と z をそれぞれ求めよ.

(問 3) (問 2) で求めた γ と z に対して, 直線 AC と直線 BD の交点を F とし, $\angle DFC = \theta$ とする. このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

$\gamma - \alpha$ を辺 AC の複素数として, 60° 回転で正三角形の第 3 点を表す. 点 B が直線 AC の負の側にあることから回転の向きを決める. (問 2) は $\eta = \gamma - \alpha, \delta = \beta - \alpha$ として二次方程式を解く. (問 3) は座標に戻し, 直線の交点を求めて内積で角の余弦を出す.

【解答】

(問 1) $\gamma - \alpha = s + (t + 1)i$ である. $\overline{(\gamma - \alpha)}(\beta - \alpha) = (s - (t + 1)i)(2 - i)$ の虚部は

$$-s - 2(t + 1) < 0$$

であるから, 点 B は直線 AC の負の側にある. したがって点 D は正の側にあり,

$$z = \alpha + (\gamma - \alpha) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

である. よって

$$z = \frac{s - \sqrt{3}(t + 1)}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t - 1}{2}i$$

である.

(問 2) $\delta = \beta - \alpha = 2 - i, \eta = \gamma - \alpha$ とおく. 与えられた等式は

$$\eta^2 - 2\delta\eta + 4\delta^2 = 0$$

であるから

$$\eta = \delta(1 \pm \sqrt{3}i)$$

である. $\delta = 2 - i$ より

$$\delta(1 + \sqrt{3}i) = (2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i$$

であり, $\eta = \gamma - \alpha$ の実部と虚部は正である. 一方, もう一方の根は虚部が負になる. したがって

$$\gamma = \alpha + (2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i = (2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 2)i$$

である.

(問 1) より

$$z = \alpha + \eta \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = (\sqrt{3} - 2) + 2\sqrt{3}i$$

である.

(問 3) 座標で

$$A(0, -1), \quad B(2, -2), \quad C(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 2), \quad D(\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3})$$

と表す. 直線 AC 上の点を

$$A + \lambda(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)$$

とおく. 直線 BD の方向ベクトルは

$$(\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2)$$

である。両直線の交点を計算すると

$$F = A + \frac{1}{3}(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)$$

である。

したがって

$$\overrightarrow{FC} = \frac{2}{3}(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1), \quad \overrightarrow{FD} = \frac{2}{3}(\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2)$$

である。内積と長さは

$$(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2) = 5, \\ |(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1)|^2 = 20, \quad |(\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2)|^2 = 35$$

である。よって

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{20}\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

点 A を原点へ平行移動し、辺 AC を回転因子で表す。(問 3) は交点 F を計算せず、2 直線の方法ベクトルの内積だけで角度を求める。

【解答】

(問 1)

$$\eta = \gamma - \alpha = s + (t + 1)i, \quad \omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とおく。点 B と反対側にある正三角形の頂点は

$$z = \alpha + \omega\eta$$

だから

$$z = \frac{s - \sqrt{3}(t + 1)}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t - 1}{2}i$$

である。

(問 2) $\delta = \beta - \alpha = 2 - i$ とおくと、与式は

$$\eta^2 - 2\delta\eta + 4\delta^2 = 0$$

である。したがって

$$\frac{\eta}{\delta} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

$s, t > 0$ を満たす方を選ぶと

$$\gamma = (2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 2)i$$

であり、

$$z = \alpha + \omega\eta = (\sqrt{3} - 2) + 2\sqrt{3}i$$

である。

(問 3) $\angle DFC$ は直線 BD と直線 AC のなす角である。方向ベクトルとして

$$\overrightarrow{AC} = (2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1), \\ \overrightarrow{BD} = (\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2)$$

をとると、内積は 5、長さの二乗は 20, 35 である。よって

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{20}\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 7. 想定時間は 25 分程度。2017 年度の複素数平面問題の中でも, 回転の向きと交点計算の両方で減点が出やすい。 $\gamma - \alpha$ を基準にして平行移動して考えると, (問 2) の二次方程式と (問 3) の座標計算がかなり整理される。位置づけは差がつく難問であり, 前半を確保したうえで時間次第では後半を見送り候補にする。

【第 2 問】

$s > 0, t > 0$ とする。原点を O とする複素数平面において, $\alpha = 2 - i, \beta = s + ti$ を表す点をそれぞれ A, B とする。さらに, 点 C を直線 OB に関して点 A と反対側にとり, $\triangle OBC$ が正三角形になるようにする。点 C を表す複素数を z とするとき, 以下の問いに答えよ。

(問 1) z を s, t を用いて表せ。

(問 2) α, β が等式 $4\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0$ を満たすとき, β と z をそれぞれ求めよ。

(問 3) (問 2) で求めた β と z に対して, 直線 AC と直線 OB の交点を D とし, $\angle CDB = \theta$ とする。このとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

正三角形は複素数の 60° 回転として表す。点 A が直線 OB のどちら側にあるかを確認して回転の向きを決める。(問 2) は β についての二次方程式を解き, $s, t > 0$ に合う根を選ぶ。(問 3) は得られた点を座標化し, 直線の交点 D を媒介変数で求めて内積から $\cos \theta$ を計算する。

【解答】

(問 1) $\triangle OBC$ は正三角形で, 点 C は直線 OB に関して点 A と反対側にある。 $\beta = s + ti$ に 60° の回転を施す向きを選べばよい。

$\bar{\beta}\alpha = (s - ti)(2 - i)$ の虚部は $-s - 2t < 0$ であるから, 点 A は直線 OB の負の側にある。したがって点 C は正の側にあり,

$$z = \beta \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

である。よって

$$z = \frac{s - \sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t}{2}i$$

である。

(問 2) 与えられた等式を β について見ると

$$\beta^2 - 2\alpha\beta + 4\alpha^2 = 0$$

である。したがって

$$\beta = \alpha(1 \pm \sqrt{3}i)$$

である。 $\alpha = 2 - i$ より

$$\alpha(1 + \sqrt{3}i) = (2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i$$

であり, これは実部・虚部ともに正である。一方, $\alpha(1 - \sqrt{3}i)$ の虚部は負である。よって

$$\beta = (2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i$$

である。

(問 1) より

$$z = \beta \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = (\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 1)i$$

である。

(問 3) 座標で

$$A(2, -1), \quad B(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1), \quad C(\sqrt{3} - 2, 2\sqrt{3} + 1)$$

と表す。直線 OB 上の点を λB とおく。直線 AC の方向ベクトルは

$$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2)$$

である。 D が両直線の交点であることから

$$D = \frac{1}{3}B$$

が得られる。実際、 $D - A = \frac{1}{3}B - A$ は $\overrightarrow{AC}$ と平行である。

したがって

$$\overrightarrow{DB} = \frac{2}{3}(2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1), \quad \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}(\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2)$$

である。よって

$$\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = \frac{4}{9} \cdot 5, \quad |\overrightarrow{DB}|^2 = \frac{4}{9} \cdot 20, \quad |\overrightarrow{DC}|^2 = \frac{4}{9} \cdot 35$$

であるから

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{20}\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

正三角形を回転因子で表し、方程式は比 β/α について解く。(問 3) では交点を求めず、直線 OB と AC の方向ベクトルだけで角を計算する。

【解答】

(問 1)

$$\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

とおく。点 A は直線 OB の負の側にあるので、反対側の頂点は

$$z = \omega\beta$$

である。したがって

$$z = \frac{s - \sqrt{3}t}{2} + \frac{\sqrt{3}s + t}{2}i$$

である。

(問 2) $\alpha \neq 0$ なので、 $u = \beta/\alpha$ とおくと

$$u^2 - 2u + 4 = 0$$

であり、

$$u = 1 \pm \sqrt{3}i$$

となる。 $s, t > 0$ を満たす方は正符号だから

$$\beta = (2 - i)(1 + \sqrt{3}i) = (2 + \sqrt{3}) + (2\sqrt{3} - 1)i$$

である。また

$$z = \omega\beta = (\sqrt{3} - 2) + (2\sqrt{3} + 1)i$$

である。

(問 3) $\angle CDB$ は直線 AC と直線 OB のなす鋭角であるから、交点 D 自体を求める必要はない。方向ベクトルとして

$$\overrightarrow{OB} = (2 + \sqrt{3}, 2\sqrt{3} - 1),$$

$$\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3} - 4, 2\sqrt{3} + 2)$$

をとる。内積は 5、長さの二乗はそれぞれ 20, 35 だから

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{20}\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

である。

【総評】 難度 7, 計算量 7. 想定時間は 25 分程度。正三角形を複素数の回転で表す向きの判定と, 二次方程式の根から $s, t > 0$ を満たす方を選ぶことが鍵である。(問 3) は座標計算が長くなりやすいため, 交点が $D = B/3$ になることを確認してから内積に進むと整理しやすい。位置づけは差がつく難問であり, 前半を確保したうえで時間次第では後半を見送り候補にする。

【第 3 問】

$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$ ($x > 0$) とする。座標平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とし, 点 $P(t, f(t))$ ($t > 0$) における曲線 C の接線を l とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) 接線 l と曲線 C が点 P 以外に共有点をもたないような t の最大値を求めよ。

(問 2) (問 1) で求めた t の値を a とする。実数 k に対し, 直線 $l_k: y = k(x-a) + f(a)$ と曲線 C の共有点の個数を求めよ。

(問 3) (問 2) の直線 l_k と曲線 C の共有点が 2 個のとき, それら共有点の x 座標のうち小さい方の値が $\frac{1}{3}$ となるような k を求め, そのときの曲線 C と直線 l_k で囲まれた部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$f(x) = 1 - 3/x + 2/x^2$ として微分し, 接線との差を因数分解して, 接点以外の共有点の x 座標を調べる。(問 1) では正の定義域に入るかどうかを判定する。(問 2) は $a = 2$ として $(x-2)(kx^2 - x + 1) = 0$ へ帰着し, 二次方程式の正の解の個数を k で場合分けする。(問 3) は $x = 1/3$ を代入して k を決め, 差を積分する。

【解答】

(問 1)

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}, \quad f'(x) = \frac{3x-4}{x^3}$$

である。点 $(t, f(t))$ における接線と曲線の共有点を調べるため,

$$f(x) - \{f'(t)(x-t) + f(t)\} = 0$$

を考える。両辺に正の数 $x^2 t^3$ を掛けて整理すると

$$(x-t)^2 \{(4-3t)x + 2t\} = 0$$

となる。よって接点以外の候補は

$$x = -\frac{2t}{4-3t}$$

である。

$t < 0$ のとき, この値は正であり, しかも接点 $x = t < 0$ とは異なるので, 定義域 $x > 0$ に接点以外の共有点をもつ。したがって条件を満たさない。

$0 < t < \frac{4}{3}$ のとき, この値は負であるから定義域 $x > 0$ に入らない。 $t = \frac{4}{3}$ のときも接点以外の共有点はない。 $t > \frac{4}{3}$ のとき, この値は正であり, 接点以外の共有点になる。ただし $-\frac{2t}{4-3t} = t$ となる $t = 2$ では, 接点と一致するだけで点 P 以外の共有点はない。したがって条件を満たす t の最大値は

2

である。

(問 2) (問 1) より $a = 2$ であり, $f(2) = 0$ である。直線 l_k は

$$y = k(x-2)$$

である。共有点の x 座標は

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x^2} = k(x-2)$$

を満たす。両辺に x^2 を掛けて整理すると

$$(x-2)(kx^2 - x + 1) = 0$$

である。

$x = 2$ は常に共有点である。二次式 $kx^2 - x + 1$ を調べる。 $k < 0$ のときは正の解が 1 個、 $k = 0$ のときも解 $x = 1$ が 1 個である。 $0 < k < \frac{1}{4}$ のときは判別式 $1 - 4k > 0$ で、積と和がともに正なので正の解が 2 個である。 $k = \frac{1}{4}$ のときは $x = 2$ が重解であり、新しい共有点はない。 $k > \frac{1}{4}$ のとき二次式に実数解はない。

したがって共有点の個数は

$$\begin{cases} 2 & (k \leq 0), \\ 3 & (0 < k < \frac{1}{4}), \\ 1 & (k \geq \frac{1}{4}) \end{cases}$$

である。

(問 3) 共有点が 2 個で、小さい方の x 座標が $\frac{1}{3}$ であるから、 $x = \frac{1}{3}$ は $kx^2 - x + 1 = 0$ の解である。よって

$$\frac{k}{9} - \frac{1}{3} + 1 = 0$$

より

$$k = -6$$

である。

このとき直線は $y = -6x + 12$ である。 $\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ において直線が曲線の上にあるので、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{1/3}^2 \left\{ -6x + 12 - \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right\} dx &= \int_{1/3}^2 \left(-6x + 11 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx \\ &= \left[-3x^2 + 11x + 3 \log_e x + \frac{2}{x} \right]_{1/3}^2 \\ &= \frac{5}{3} + 3 \log_e 6 \end{aligned}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

接線との差の因数分解を『接点の重解と第 3 交点』として読む。(問 3) では直線と曲線の差も完全に因数分解し、符号を確認してから表示積分する。

【解答】

(問 1) 接線と曲線の共有点方程式は

$$(x - t)^2 \{ (4 - 3t)x + 2t \} = 0$$

である。接点以外の候補は

$$r(t) = \frac{2t}{3t - 4}$$

である。 $t < 0$ では $r(t) > 0$ かつ接点 t と異なるため条件を満たさない。 $0 < t \leq 4/3$ では正の第 3 交点をもたず、 $t > 4/3$ では通常 $r(t) > 0$ となる。ただし

$$r(t) = t$$

となるのは $t = 2$ で、このとき第 3 交点も接点に重なる。したがって条件を満たす最大値は

$$a = 2$$

である。

(問 2) $a = 2$, $f(2) = 0$ より直線は $y = k(x - 2)$ であり、共有点条件は

$$(x - 2)(kx^2 - x + 1) = 0$$

となる。二次因子の正の実根を判定すると

$$\begin{cases} 2\text{個} & (k \leq 0), \\ 3\text{個} & (0 < k < 1/4), \\ 1\text{個} & (k \geq 1/4) \end{cases}$$

の共有点をもつ。 $k = 1/4$ では二次因子の重根も $x = 2$ であることに注意する。

(問 3) $x = 1/3$ を二次因子へ代入して

$$k = -6$$

を得る。このとき

$$l_k(x) - f(x) = \frac{(2-x)(3x-1)(2x+1)}{x^2}$$

であり、 $1/3 \leq x \leq 2$ で非負である。よって面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{1/3}^2 \left(-6x + 11 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right) dx \\ &= \left[-3x^2 + 11x + 3 \log_e x + \frac{2}{x} \right]_{1/3}^2 \\ &= \frac{5}{3} + 3 \log_e 6 \end{aligned}$$

である。

【総評】 難度 8, 計算量 8. 想定時間は 30 分程度。接線との差を因数分解して接点以外の共有点を一括で扱えるかが勝負になる。(問 2) では $k = 1/4$ のとき $x = 2$ が重なるだけで共有点は 1 個である点が落とし穴である。(問 3) は有理関数の積分で符号と自然対数の評価を慎重に処理したい。位置づけは差がつく難問であり、前半を確保したうえで時間次第では後半を見送り候補にする。

【第 3 問】

$f(x) = x^2 + x$ とし、数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。 $a_1 = 8$ とする。 a_n ($n \geq 1$) に対して、座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $((a_n)^2, f((a_n)^2))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする。ただし、 $(a_n)^2$ は a_n の 2 乗を表す。以下の問いに答えよ。

(問 1) すべての自然数 n に対し、 $a_n > 0$ が成り立つことを示せ。

(問 2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくと、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

接点の x 座標を $u = (a_n)^2$ とおき、 $y = x^2 + x$ の接線と $y = x$ の交点を計算して $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$ を得る。正值性はこの漸化式から帰納的に示す。 $b_n = \log_2 a_n$ により一次漸化式 $b_{n+1} = 2b_n - 1$ へ直し、 $b_n - 1$ を等比数列として解く。

【解答】

(問 1) $u = (a_n)^2$ とおく。 $f'(x) = 2x + 1$ であるから、曲線 $y = f(x)$ の点 $(u, f(u))$ における接線は

$$y = (2u + 1)(x - u) + u^2 + u = (2u + 1)x - u^2$$

である。これと $y = x$ の交点の x 座標は

$$x = (2u + 1)x - u^2$$

より、 $u > 0$ のとき $x = \frac{u}{2}$ である。したがって

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$$

である。 $a_1 = 8 > 0$ であり、 $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2} > 0$ であるから、すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つ。

(問 2) $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2}$ より

$$b_{n+1} = \log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^2}{2} = 2 \log_2 a_n - 1 = 2b_n - 1$$

である。

(問 3) $b_1 = \log_2 8 = 3$ である。(問 2) より

$$b_{n+1} - 1 = 2(b_n - 1)$$

であるから、 $b_n - 1$ は初項 2、公比 2 の等比数列である。よって

$$b_n - 1 = 2^n$$

すなわち $b_n = 2^n + 1$ である。したがって

$$a_n = 2^{2^n+1}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

接線計算から得た $a_{n+1} = a_n^2/2$ に対し、対数漸化式を固定点移動せず反復する。最後は得られた一般項を元の漸化式へ代入して帰納的にも確認する。

【解答】

(問 1) $u = a_n^2$ とおくと、接線は

$$y = (2u + 1)x - u^2$$

である。 $y = x$ との交点では

$$2ux = u^2$$

となるので、 $u > 0$ なら

$$a_{n+1} = \frac{u}{2} = \frac{a_n^2}{2} > 0$$

である。 $a_1 = 8 > 0$ から帰納的にすべての a_n は正である。

(問 2)

$$b_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^2}{2} = 2b_n - 1$$

である。

(問 3) $b_1 = 3$ であり、漸化式を繰り返すと

$$\begin{aligned} b_n &= 2^{n-1}b_1 - (1 + 2 + \cdots + 2^{n-2}) \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^n + 1 \end{aligned}$$

となる。よって

$$a_n = 2^{b_n} = 2^{2^n+1}$$

である。実際、この式は $a_1 = 8$ を満たし、 $a_n^2/2 = a_{n+1}$ となる。

【総評】 難度 5、計算量 4。想定時間は 15 分程度。接線と直線 $y = x$ の交点から漸化式を正確に作ることが最重要である。 $a_{n+1} = a_n^2/2$ が出れば、対数を取って一次漸化式に落とす流れは標準的で、指数の添字を一つずらさないように注意したい。位置づけは差がつく標準問題であり、方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。

【第 3 問】

関数 $f(x) = \log_2 x - x + 1$ ($x > 0$) について、以下の問いに答えよ。

(問 1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(問 2) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。なお、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ を用いてもよい。

(問 3) 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

$L = \log_e 2$ とおき、 $\log_2 x = \frac{\log_e x}{L}$ として微分する。増減から極大値と零点の個数を判定し、 $x = 1, 2$ が解であることを確認する。囲まれた部分は $1 \leq x \leq 2$ で $f(x) \geq 0$ となるので、その定積分を計算する。

【解答】

(問 1) $L = \log_e 2$ とおくと

$$f(x) = \frac{\log_e x}{L} - x + 1$$

である。したがって

$$f'(x) = \frac{1}{Lx} - 1$$

であり、 $f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{1}{L}$ のときである。 $f'(x)$ は $0 < x < \frac{1}{L}$ で正、 $x > \frac{1}{L}$ で負であるから、 $x = \frac{1}{L}$ で極大となる。極大値は

$$f\left(\frac{1}{L}\right) = \log_2 \frac{1}{L} - \frac{1}{L} + 1$$

である。極小値はない。

(問 2) $f(1) = 0$ 、 $f(2) = 0$ である。また $\frac{1}{2} < L < 1$ より $1 < \frac{1}{L} < 2$ である。したがって $f(x)$ は $(0, \frac{1}{L})$ で増加し、 $(\frac{1}{L}, \infty)$ で減少する。

$x = 1$ と $x = 2$ はそれぞれ零点であり、増減と $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ より、これ以外の零点はない。よって解は

$$x = 1, \quad x = 2$$

である。

(問 3) (問 2) と増減より、曲線と x 軸で囲まれる部分は $1 \leq x \leq 2$ にあり、この区間で $f(x) \geq 0$ である。したがって面積は

$$\begin{aligned} \int_1^2 (\log_2 x - x + 1) dx &= \int_1^2 \left(\frac{\log_e x}{L} - x + 1 \right) dx \\ &= \left[\frac{x \log_e x}{L} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{L} \end{aligned}$$

である。すなわち

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{\log_e 2}$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

微分で極大点を求めた後、 $f''(x) < 0$ による厳密な上に凸性から零点が高々 2 個であることを示す。既知の 2 零点を確認して面積積分へ進む。

【解答】

(問 1) $L = \log_e 2$ とおくと

$$f'(x) = \frac{1}{Lx} - 1, \quad f''(x) = -\frac{1}{Lx^2} < 0$$

である。したがって $x = 1/L$ でただ 1 つの極大値

$$f\left(\frac{1}{L}\right) = \log_2 \frac{1}{L} - \frac{1}{L} + 1$$

をとり、極小値はない。

(問 2) 直接代入して

$$f(1) = f(2) = 0$$

である。また $f''(x) < 0$ なので f は厳密に上に凸であり、異なる 3 個の零点をもつことはない。実際、3 零点があれば中央の零点での値は、両端を結ぶ弦の値 0 より真に大きくなるはずで、矛盾する。よって解は

$$x = 1, \quad x = 2$$

だけである。

(問 3) $1 < x < 2$ では上に凸性から $f(x) > 0$ である。したがって面積は

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \left[\frac{x \log_e x - x}{L} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{\log_e 2} \end{aligned}$$

である。

【総評】 難度 6, 計算量 5. 想定時間は 18 分程度。底が 2 の対数を自然対数に直して微分・積分する点を中心である。 $1 < 1/\log_e 2 < 2$ を確認してから零点の個数を述べると答案の抜けが少ない。面積は小さい正の値になるので、符号の確認も必要である。位置づけは差がつく標準問題であり、方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。

【第 4 問】

n は 2 以上の自然数とする。1 から $2n$ までの自然数の順列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ に対して、分数の和

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} + \frac{a_2}{a_{n+2}} + \dots + \frac{a_n}{a_{2n}}$$

を考える。1 から $2n$ までの自然数のすべての順列に対してこの和がとり得る値の最大値を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) S_2 を求めよ。

(問 2) S_n を与える順列 $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ の例を 1 つ挙げ、その理由を述べよ。

(問 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n}$ を求めよ。

▶ 解法 1

【方針】

まず、分子側に小さい数、分母側に大きい数があるなら、その 2 数の役割を入れ替えると和が増えることを示し、最大では分子が $n+1, \dots, 2n$ 、分母が $1, 2, \dots, n$ であることを導く。次に、分子が大きいものほど分母が小さいものと組むと和が増えることを交換で示す。これにより $S_n = (2n+1) \sum_{k=1}^n 1/k - n$ を得て、最後は調和和と $\log n$ の比較で極限を求める。

【解答】

(問 1) $n = 2$ のとき、 $1, 2, 3, 4$ を用いる。最大にするには、大きい数を分子、小さい数を分母にし、さらに大きい分子を小さい分母と組にすればよい。したがって

$$S_2 = \frac{4}{1} + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$$

である。

(問 2) 次の順列を考える。

$$a_1 = 2n, \quad a_2 = 2n-1, \quad \dots, \quad a_n = n+1, \\ a_{n+1} = 1, \quad a_{n+2} = 2, \quad \dots, \quad a_{2n} = n$$

このとき

$$S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{2n+1-k}{k}$$

である。

これが最大であることを示す。ある順列で、分子側にある数 p と分母側にある数 q が $p < q$ を満たすとする。 p が分子である項を $\frac{p}{d}$ 、 q が分母である項を $\frac{c}{q}$ とする。 p と q の位置を入れ替えると、この 2 項は

$$\frac{q}{d} + \frac{c}{p}$$

になる。その増加分は

$$\frac{q-p}{d} + c \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0$$

である。よって最大するとき、分子側の数はすべて分母側の数より大きい。したがって分母側は $1, 2, \dots, n$ 、分子側は $n+1, n+2, \dots, 2n$ でなければならない。

次に、分子 $x > y$ が分母 $u > v$ とそれぞれ組になっているとする。この 2 組を入れ替えると

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{u} - \left(\frac{x}{u} + \frac{y}{v} \right) = (x-y) \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right) > 0$$

である。したがって最大では、大きい分子ほど小さい分母と組む。よって上に挙げた順列が S_n を与え、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n+1-k}{k} = (2n+1) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - n$$

である。

(問 3) $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ とおく。(問 2) より

$$\frac{S_n}{n \log n} = \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{H_n}{\log n} - \frac{1}{\log n}$$

である。ここで $\log$ は自然対数である。

$1/x$ のグラフと面積を比較すると

$$\int_1^n \frac{dx}{x} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$$

であるから

$$1 \leq \frac{H_n}{\log n} \leq 1 + \frac{1}{\log n}$$

である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H_n}{\log n} = 1$$

である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n \log n} = 2$$

である。

▶ 解法 2

【方針】

分子集合と分母集合の分離, および組合せの順序を, 隣接交換による並べ替え不等式として整理する。最大値を調和数で表した後, 積分比較で極限を挟む。

【解答】

(問 1) 分子には大きい 2 数, 分母には小さい 2 数を置き, 大きい分子を小さい分母と組ませるので

$$S_2 = \frac{4}{1} + \frac{3}{2} = \frac{11}{2}$$

である。

(問 2) 最大となる例として

$$(a_1, \dots, a_n) = (2n, 2n-1, \dots, n+1),$$

$$(a_{n+1}, \dots, a_{2n}) = (1, 2, \dots, n)$$

をとる。

実際, 分子側の p と分母側の q が $p < q$ なら, 両者を交換したときの増分は

$$\frac{q-p}{d} + c \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) > 0$$

である。よって最大時の分子集合は $\{n+1, \dots, 2n\}$ である。

さらに $x > y, u > v$ に対して

$$\frac{x}{v} + \frac{y}{u} - \frac{x}{u} - \frac{y}{v} = (x-y) \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u} \right) > 0$$

だから, 大きい分子と小さい分母を組ませるのが最大である。したがって

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n+1-k}{k} = (2n+1)H_n - n, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

である。

(問 3) 積分比較

$$\log n \leq H_n \leq 1 + \log n$$

より $H_n / \log n \rightarrow 1$ である。したがって

$$\frac{S_n}{n \log n} = \left(2 + \frac{1}{n} \right) \frac{H_n}{\log n} - \frac{1}{\log n} \rightarrow 2$$

である。

【総評】 難度 8, 計算量 6。想定時間は 25 分程度。最大化の本質は交換による不等式であり, 分子集合を大きい数, 分母集合を小さい数に分ける段階と, その後の組み合わせの段階を分けて証明する必要がある。(問 3) は S_n の式が出れば, 調和和と自然対数の標準的な比較で処理できる。位置づけは差がつく難問であり, 前半を確保したうえで時間次第では後半を送り候補にする。

【第 4 問】

$f(x) = x^2 + x$ とし, j は自然数とする. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める. $a_1 = 2$ とする. a_n ($n \geq 1$) に対して, 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ 上の点 $((a_n)^j, f((a_n)^j))$ における接線と直線 $y = x$ との交点の x 座標を a_{n+1} とする. ただし, $(a_n)^j$ は a_n の j 乗を表す. 以下の問いに答えよ.

(問 1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 0$ が成り立つことを示せ.

(問 2) $b_n = \log_2 a_n$ とおくと, b_{n+1} を b_n を用いて表せ.

(問 3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

▶ 解法 1

【方針】

接点の x 座標を $u = (a_n)^j$ として, 接線と $y = x$ の交点から $a_{n+1} = a_n^j/2$ を得る. 対数を取ると $b_{n+1} = jb_n - 1$ となる. $j = 1$ と $j \neq 1$ で一次漸化式の解き方が分かれるため, 最後に場合分けして a_n へ戻す.

【解答】

(問 1) $u = (a_n)^j$ とおく. $f'(x) = 2x + 1$ であるから, 曲線 $y = f(x)$ の点 $(u, f(u))$ における接線は

$$y = (2u + 1)(x - u) + u^2 + u = (2u + 1)x - u^2$$

である. これと $y = x$ の交点の x 座標は

$$x = (2u + 1)x - u^2$$

より $x = \frac{u}{2}$ である. したがって

$$a_{n+1} = \frac{a_n^j}{2}$$

である. $a_1 = 2 > 0$ であり, $a_n > 0$ ならば $a_{n+1} > 0$ であるから, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ が成り立つ.

(問 2) (問 1) より

$$b_{n+1} = \log_2 a_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^j}{2} = j \log_2 a_n - 1 = jb_n - 1$$

である.

(問 3) $b_1 = \log_2 2 = 1$ である.

$j = 1$ のとき, (問 2) より $b_{n+1} = b_n - 1$ であるから

$$b_n = 2 - n$$

である. したがって

$$a_n = 2^{2-n}$$

である.

$j \neq 1$ のとき,

$$b_{n+1} - \frac{1}{j-1} = j \left(b_n - \frac{1}{j-1} \right)$$

である. よって

$$b_n - \frac{1}{j-1} = j^{n-1} \left(1 - \frac{1}{j-1} \right)$$

となり,

$$b_n = \frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}$$

である. したがって

$$a_n = 2^{\frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}}$$

である.

▶ 解法 2

【方針】

接線から $a_{n+1} = a_n^j/2$ を得て対数を取り，得られた一次漸化式を反復代入と等比和で解く。 $j = 1$ だけは先に分ける。

【解答】

(問 1) $u = a_n^j$ とおくと接線は $y = (2u + 1)x - u^2$ であり， $y = x$ との交点から

$$a_{n+1} = \frac{u}{2} = \frac{a_n^j}{2}$$

を得る。 $a_1 = 2 > 0$ なので，帰納的に $a_n > 0$ である。

(問 2)

$$b_{n+1} = \log_2 \frac{a_n^j}{2} = jb_n - 1$$

である。

(問 3) $b_1 = 1$ である。 $j = 1$ なら $b_n = 2 - n$ だから

$$a_n = 2^{2-n}$$

である。 $j \neq 1$ なら反復代入して

$$b_n = j^{n-1} - \sum_{r=0}^{n-2} j^r = \frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}$$

となる。よって

$$a_n = 2^{\frac{(j-2)j^{n-1} + 1}{j-1}}$$

である。

【総評】 難度 6，計算量 5。想定時間は 18 分程度。接線計算自体は標準的だが， j を含むため最後の一次漸化式で $j = 1$ を別扱いする必要がある。 $j = 2$ のときにも式が正しく一定列を与えるか確認すると，添字ミスを発見しやすい。位置づけは差がつく標準問題であり，方針を早く固めて計算ミスなく完答したい。