

熊本大学 2020 年度 数学①

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

a を実数の定数とし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して

$$y = (\sin \theta + a)(\cos \theta + a)$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと、 y を a, t を用いて表せ。
- (2) t のとり得る値の範囲を求めよ。
- (3) y の最大値と最小値を a を用いて表せ。

▶ 解法 1 (二次関数として軸の位置を調べる)

【方針】

$t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ を用いて y を t の二次関数に直す。 $t \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 上で、最大値は両端を比較し、最小値は軸 $t = -a$ が区間内にあるかで場合分けする。

【解答】

(1)

$$t^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

だから、

$$\begin{aligned} y &= \sin \theta \cos \theta + a(\sin \theta + \cos \theta) + a^2 \\ &= \frac{1}{2}t^2 + at + a^2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2)

$$t = \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

である。 $0 \leq \theta < 2\pi$ の間に正弦は -1 から 1 までのすべての値を取るの、

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

(3)

$$y = \frac{1}{2}(t+a)^2 + \frac{a^2-1}{2}$$

は下に凸で、軸は $t = -a$ である。最大値は軸から遠い方の端点で取り、

$$y_{\max} = a^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}|a|.$$

最小値は、 $-a$ が区間 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ に入るかどうかで決まる。したがって

$$y_{\min} = \begin{cases} \frac{a^2-1}{2} & (|a| \leq \sqrt{2}), \\ a^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}|a| & (|a| \geq \sqrt{2}) \end{cases}$$

となる。境界 $|a| = \sqrt{2}$ では両式が一致する。

▶ 解法 2 (点と区間の距離で一括して処理する)

【方針】

平方完成後の $(t+a)^2$ を、点 $-a$ と区間 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 上の点 t の距離の二乗と見る。距離の最大・最小を求めれば、煩雑な符号別計算を避けられる。

【解答】

(1)

$t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$ より

$$y = \frac{1}{2}t^2 + at + a^2 - \frac{1}{2}.$$

(2)

$t = \sqrt{2} \sin(\theta + \pi/4)$ だから

$$-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}.$$

(3)

$|t+a|$ は、数直線上の点 $-a$ と区間内の点 t の距離である。最も遠い端点までの距離は

$$|a| + \sqrt{2}$$

だから、

$$\begin{aligned} y_{\max} &= \frac{1}{2}(|a| + \sqrt{2})^2 + \frac{a^2 - 1}{2} \\ &= a^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{2}|a|. \end{aligned}$$

一方、点 $-a$ と区間との最短距離は

$$\text{dist}(-a, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]) = \begin{cases} 0 & (|a| \leq \sqrt{2}), \\ |a| - \sqrt{2} & (|a| \geq \sqrt{2}) \end{cases}$$

である。これを平方完成した式へ代入すると、

$$y_{\min} = \begin{cases} \frac{a^2 - 1}{2} & (|a| \leq \sqrt{2}), \\ a^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}|a| & (|a| \geq \sqrt{2}) \end{cases}$$

を得る。

【総評】 難度 5、目安時間 18 分。最初の核心は $\sin \theta \cos \theta = (t^2 - 1)/2$ である。最大値を頂点で取ると誤認しやすいが、下に凸の二次関数の最大値は閉区間の端点で取る。最小値の境界 $|a| = \sqrt{2}$ で 2 つの式が一致することまで確認すると、場合分けの検算になる。

【第 2 問】

実数 a, c と整数 b が $a < b < c$ を満たすとし、

$$g(x) = (x-a)(x-b)(x-c), \quad f(x) = g(x) - g'(x)$$

と定める。次の問いに答えよ。

- (1) $f(a) < 0, f(b) > 0, f(c) < 0$ であることを示せ。
- (2) $f(x) = (x+1)(x^2 - 4x + 2)$ のとき、 a, b, c を求めよ。
- (3) (2) の a, b, c から定まる 2 曲線 $y = g(x)$ と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (根での微分と係数比較を用いる)

【方針】

根 a, b, c では $f = -g'$ となるので、積の形から g' の符号を読む。(2) では基本対称式を置いて係数比較し、(3) では $f - g = -g'$ をそのまま面積差に用いる。

【解答】

(1)

$g(a) = g(b) = g(c) = 0$ だから、各根では $f = -g'$ である。また

$$\begin{aligned} g'(a) &= (a-b)(a-c) > 0, \\ g'(b) &= (b-a)(b-c) < 0, \\ g'(c) &= (c-a)(c-b) > 0. \end{aligned}$$

よって

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0, \quad f(c) < 0.$$

(2)

$$g(x) = x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3$$

とおく。ただし $s_1 = a + b + c$, $s_2 = ab + bc + ca$, $s_3 = abc$ である。微分して差を取ると

$$f(x) = x^3 + (-s_1 - 3)x^2 + (s_2 + 2s_1)x - (s_3 + s_2).$$

一方、

$$(x+1)(x^2 - 4x + 2) = x^3 - 3x^2 - 2x + 2.$$

係数比較により

$$s_1 = 0, \quad s_2 = -2, \quad s_3 = 0.$$

したがって

$$g(x) = x^3 - 2x = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}).$$

$a < b < c$ で、中央の根 b は整数だから

$$a = -\sqrt{2}, \quad b = 0, \quad c = \sqrt{2}.$$

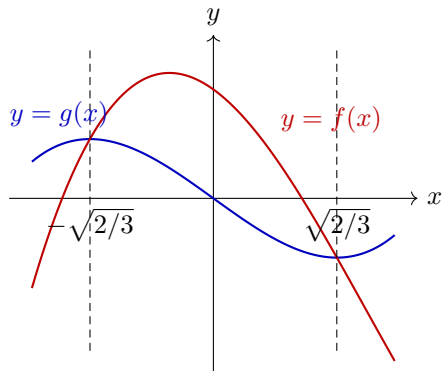
(3)

$$f(x) - g(x) = -g'(x) = 2 - 3x^2.$$

2 曲線の交点の x 座標は

$$2 - 3x^2 = 0, \quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

この区間では $f(x) \geq g(x)$ である。



よって求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2/3}}^{\sqrt{2/3}} (2 - 3x^2) dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2/3}} (2 - 3x^2) dx \\ &= \frac{8\sqrt{6}}{9}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (未知の三次式を直接復元する)

【方針】

$g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ と置き、恒等式 $g - g' = f$ を一次方程式として解く。面積は 2 曲線の差が偶関数になることを利用して半区間だけ積分する。

【解答】

(1)

三次関数 g は、単根 a, b, c を左から順に横切る。したがって各根での傾きの符号は

$$g'(a) > 0, \quad g'(b) < 0, \quad g'(c) > 0.$$

根では $f = -g'$ だから、求める 3 つの不等式が従う。

(2)

$$g(x) = x^3 + px^2 + qx + r$$

と置くと、

$$g(x) - g'(x) = x^3 + (p-3)x^2 + (q-2p)x + (r-q).$$

これを $x^3 - 3x^2 - 2x + 2$ と比較して

$$p = 0, \quad q = -2, \quad r = 0.$$

よって $g(x) = x^3 - 2x$ であり、根の大小順から

$$(a, b, c) = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}).$$

(3)

差は

$$f(x) - g(x) = 2 - 3x^2$$

という偶関数である。正の交点を $\alpha = \sqrt{2/3}$ とすると、対称性から

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\alpha} (2 - 3x^2) dx \\ &= 2[2x - x^3]_0^{\alpha}. \end{aligned}$$

ここで $3\alpha^2 = 2$ なので $\alpha^3 = 2\alpha/3$ 。したがって

$$S = 2 \left(2\alpha - \frac{2\alpha}{3} \right) = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{8\sqrt{6}}{9}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。 $f = g - g'$ を最後まで保持すると、根での符号も曲線間の上下関係も同じ情報から得られる。(2) では g が最高次係数 1 の三次式であること、(3) では積分区間内で $f - g \geq 0$ であることを明記する。図は交点と上下関係の確認に使い、面積計算そのものは $f - g = 2 - 3x^2$ で行う。

【第 3 問】

xy 平面において、 x, y がともに整数である点 (x, y) を格子点という。自然数 n に対し、3 直線

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}, \quad y = x - n, \quad x = n$$

で囲まれる図形を D_n とする。 D_n の周上および内部にある格子点の個数を L_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) L_3 を求めよ。
- (2) k を 0 以上の整数とする。直線 $\ell: x = n + 3k$ が D_n と交わる時、 D_n の周上および内部にある ℓ 上の格子点の個数を n, k で表せ。
- (3) L_n を n で表せ。

▶ 解法 1 (縦列を 3 本ずつまとめて数える)

【方針】

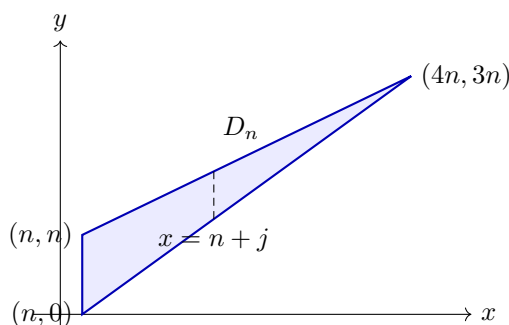
三角形の頂点を求め、 $x = n + j$ の縦列で下端と上端を比較する。 j を 3 で割った余りが 0、1、2 の場合に分けると、床関数を使わずに各列の格子点数を数えられる。

【解答】

3 直線の交点を求めると、 D_n は

$$(n, 0), \quad (n, n), \quad (4n, 3n)$$

を頂点とする三角形である。



(1)

(3) の一般式を先に得れば直ちに計算できるが、 $n = 3$ を直接数えてもよい。(3) の結果から

$$L_3 = \frac{(3+1)(3 \cdot 3 + 2)}{2} = 22.$$

(2)

$x = n + 3k$ 上で、下側の直線 $y = x - n$ は

$$y = 3k,$$

上側の直線 $y = \frac{2}{3}x + \frac{n}{3}$ は

$$y = n + 2k$$

となる。交わる範囲は $0 \leq k \leq n$ であり、両端を含む整数 y の個数は

$$(n + 2k) - 3k + 1 = n - k + 1.$$

(3)

$x = n + j$ と置くと $0 \leq j \leq 3n$ である。下端は $y = j$ 、上端は $y = n + 2j/3$ である。

$j = 3k$ の列は (2) より $n - k + 1$ 個である。さらに

j	上端以下の最大整数	格子点数
$3k + 1$	$n + 2k$	$n - k$
$3k + 2$	$n + 2k + 1$	$n - k$

となる。したがって

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k=0}^n (n - k + 1) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} (n - k) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{2}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (床関数の和として整理する)

【方針】

各整数 $x = n + j$ に対する格子点数を、上端の床関数を使って 1 本の式にする。 $j = 3k, 3k + 1, 3k + 2$ の 3 項を一組にして床関数の和を計算する。

【解答】

(1)

$n = 3$ のとき $j = 0, 1, \dots, 9$ であり、各縦列の格子点数は

$$4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$$

となる。よって

$$L_3 = 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 22.$$

(2)

$j = 3k$ を代入すると、格子点の y 座標は

$$3k \leq y \leq n + 2k.$$

したがって個数は $n - k + 1$ である。

(3)

一般の j に対する個数を N_j とすると、

$$N_j = \left\lfloor n + \frac{2j}{3} \right\rfloor - j + 1 = n + 1 - j + \left\lfloor \frac{2j}{3} \right\rfloor.$$

ここで $0 \leq k \leq n - 1$ に対し、

$$\begin{aligned} N_{3k} &= n - k + 1, \\ N_{3k+1} &= n - k, \\ N_{3k+2} &= n - k. \end{aligned}$$

最後の列 $j = 3n$ には 1 点あるので、

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \{(n - k + 1) + (n - k) + (n - k)\} + 1 \\ &= \sum_{r=1}^n (3r + 1) + 1 \\ &= \frac{3n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{(n+1)(3n+2)}{2}. \end{aligned}$$

この式へ $n = 3$ を代入しても 22 となり、(1) と一致する。

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。図形の頂点 $(n, 0), (n, n), (4n, 3n)$ を最初に確定させると、数えるべき x の範囲が $n \leq x \leq 4n$ と分かる。上端に分母 3 があるため、縦列を $j \bmod 3$ で分類するのが自然である。端点を含むので個数に +1 が付くこと、最後の列 $j = 3n$ を落とさないことを検算する。

【第 4 問】

実数 k, s, t に対し、座標空間に

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, -1, 1), \quad B(0, 1, 1), \quad C(-1, 0, k)$$

を取る。点 D, E, P を

$$\overrightarrow{OD} = (1-s)\overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OB} + (1-t)\overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{DE}$$

によって定める。次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標を k, s, t で表せ。
- (2) $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$ のもとで点 P が動いてできる平行四辺形を $P(k)$ 、その面積を $S(k)$ とする。実数 k に対する $S(k)$ の最小値と、そのときの k を求めよ。
- (3) (2) で求めた k に対し、 $P(k)$ を底面、 O を頂点とする四角錐の体積を求めよ。

▶ 解法 1 (内積の面積公式と平面方程式を用いる)

【方針】

$P = E - D$ を成分で計算する。 s, t の係数ベクトルを平行四辺形の 2 辺と見て、内積による面積公式を用いる。最小時の底面の平面方程式を作り、原点からの高さを求める。

【解答】

(1)

$$D = (1-s, -1+s, 1-s), \quad E = (t-1, t, k+(1-k)t)$$

である。 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{DE} = E - D$ より

$$P = (s+t-2, -s+t+1, s+(1-k)t+k-1).$$

(2)

s, t の係数ベクトルを

$$\mathbf{u} = (1, -1, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 1, 1-k)$$

とおく。 $0 \leq s, t \leq 1$ だから、この 2 ベクトルが平行四辺形の隣り合う辺である。内積を計算すると

$$|\mathbf{u}|^2 = 3, \quad |\mathbf{v}|^2 = k^2 - 2k + 3, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 - k.$$

よって平行四辺形の面積について

$$\begin{aligned} S(k)^2 &= |\mathbf{u}|^2 |\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \\ &= 3(k^2 - 2k + 3) - (1 - k)^2 \\ &= 2(k - 1)^2 + 6. \end{aligned}$$

したがって

$$k = 1 \text{ のとき } S(k) \text{ は最小, } \min S(k) = \sqrt{6}.$$

(3)

$k = 1$ のとき、底面の 2 方向は

$$\mathbf{u} = (1, -1, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 1, 0)$$

である。法線ベクトルを (a, b, c) とすると

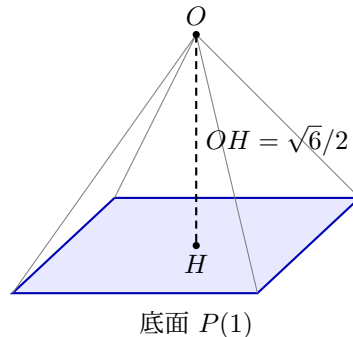
$$a - b + c = 0, \quad a + b = 0$$

を満たせばよいので、 $(1, -1, -2)$ を取れる。 $s = t = 0$ に対応する底面上の点は $(-2, 1, 0)$ だから、底面の平面は

$$x - y - 2z = -3$$

である。原点からこの平面へ下ろした垂線の足は

$$H = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \quad OH = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$



よって四角錐の体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 1.$$

▶ 解法 2 (射影で面積を求める)

【方針】

射影で一方の辺に垂直な成分を求めて面積を計算し、底面の 2 方向に垂直なベクトルから高さを求める。

【解答】

(1)

点 P は

$$P = (-2, 1, k-1) + s(1, -1, 1) + t(1, 1, 1-k) = (s+t-2, -s+t+1, s+(1-k)t+k-1).$$

(2)

$\mathbf{u} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1-k)$ とおく。 $\mathbf{v}$ の $\mathbf{u}$ に垂直な成分を高さと見れば

$$\begin{aligned} S(k)^2 &= |\mathbf{u}|^2 \left\{ |\mathbf{v}|^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{|\mathbf{u}|^2} \right\} \\ &= 3(k^2 - 2k + 3) - (1-k)^2 = 2(k-1)^2 + 6. \end{aligned}$$

ゆえに $k = 1$ で最小値 $\sqrt{6}$ を取る。

(3)

$k = 1$ のとき、底面の 2 辺に垂直な (a, b, c) は

$$a - b + c = 0, \quad a + b = 0$$

を満たすので、法線ベクトルを $(1, -1, -2)$ と取れる。底面は $(-2, 1, 0)$ を通るから、その平面と原点からの高さは

$$x - y - 2z = -3, \quad h = \frac{3}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

したがって体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 1.$$

【総評】 難度 7、目安時間 30 分。点 P を「基準点 + 2 本方向ベクトル」と表すことが要点である。面積は内積公式でも射影でも $S(k)^2 = 2(k-1)^2 + 6$ に帰着する。体積では最小時の底面に垂直な方向を内積の連立条件から求めれば、高校数学の空間ベクトルだけで処理できる。