

入 学 試 験 問 題

数 学



熊 本 大 学 2020 年 度 数 学 ②

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

次の問いに答えよ。

(1) 自然数 x に対し、 x^2 を 5 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2) 自然数 x, y, z が

$$x^2 + 5y^2 = 2z^2$$

を満たすならば、 x, y, z はすべて 5 の倍数であることを示せ。

(3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

第 2 問

複素数 α, β に対し、複素数平面上の点

$$O(0), \quad A(\alpha), \quad B(\beta), \quad C(|\alpha|^2), \quad D(\bar{\alpha}\beta)$$

を考える。3点 O, A, B は三角形をなすとする。また、複素数 z の虚部を $\text{Im}(z)$ と表す。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 、 $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき、 S_2/S_1 を求めよ。
- (2) $S_1 = \frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ であることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対して $z = a+bi$ とする。 $1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$ のとき、3点 $O(0), P(z), Q(1/z)$ を頂点とする三角形の面積の最大値と最小値を求めよ。

第 3 問

$0 < t < \pi/2$ とする。曲線

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

と x 軸、 y 軸、直線 $x = t$ で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $0 < a < b < \pi/2$ のとき、

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

(2) (1) を用いて

$$\frac{d}{dt} V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

を示せ。

(3) $V(\pi/3)$ を求めよ。

第 4 問

正の実数 t に対し、座標平面上の 2 点

$$F(t, 0), \quad F'(3t, 0)$$

からの距離の和が $2\sqrt{2}t$ である点 P の軌跡を C とする。また、直線 $y = x - 1$ を ℓ とする。
次の問いに答えよ。

- (1) C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の範囲を求めよ。
- (2) t が (1) の範囲を動くとき、 C と ℓ の 2 共有点および原点 O を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)