

熊本大学 2020 年度 数学②

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

次の問いに答えよ。

(1) 自然数 x に対し、 x^2 を 5 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。

(2) 自然数 x, y, z が

$$x^2 + 5y^2 = 2z^2$$

を満たすならば、 x, y, z はすべて 5 の倍数であることを示せ。

(3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

▶ 解法 1 (平方剰余から無限降下する)

【方針】

平方数の 5 を法とする剰余を列挙する。(2) では方程式を 5 で見てまず x, z 、次に y が 5 の倍数であることを示す。(3) では同じ形のより小さい自然数解が得られることを矛盾にする。

【解答】

(1)

任意の整数 x は 5 を法として $0, \pm 1, \pm 2$ のいずれかに合同である。したがって

$$x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$$

のいずれかである。

(2)

与式を 5 を法として見ると

$$x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}.$$

平方剰余 0, 1, 4 を 2 倍した余りは 0, 2, 3 であり、両者の共通部分は 0 だけである。よって

$$x^2 \equiv z^2 \equiv 0 \pmod{5}, \quad 5 \mid x, \quad 5 \mid z.$$

$x = 5x_1, z = 5z_1$ と書いて元の式へ代入し、5 で割ると

$$5x_1^2 + y^2 = 10z_1^2.$$

したがって $y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ であり、 $5 \mid y$ である。ゆえに x, y, z はすべて 5 の倍数である。

(3)

自然数解が存在すると仮定する。(2) より

$$x = 5x_1, \quad y = 5y_1, \quad z = 5z_1$$

と書ける。元の式へ代入して 25 で割れば

$$x_1^2 + 5y_1^2 = 2z_1^2$$

となる。つまり (x_1, y_1, z_1) も自然数解であり、各成分は元の解の 5 分の 1 である。同じ操作を繰り返すと、正の自然数を何度でも 5 で割れることになり不可能である。したがって

自然数解は存在しない。

▶ 解法 2 (最小解を仮定して矛盾を導く)

【方針】

(1) の平方剰余表を使って (2) を証明した後、(3) では $x + y + z$ が最小の解を取る。全成分を 5 で割った組がさらに小さい解になるため、最小性に反する。

【解答】

(1)

剰余を直接表にすると

$$\begin{array}{c|ccccc} x \bmod 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline x^2 \bmod 5 & 0 & 1 & 4 & 4 & 1 \end{array}$$

だから、平方の余りは $0, 1, 4$ に限られる。

(2)

$x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$ に対し、 $z^2 \equiv 1, 4$ なら右辺はそれぞれ $2, 3$ となり、平方剰余にはならない。よって $z^2 \equiv 0 \pmod{5}$ で、同時に $x^2 \equiv 0 \pmod{5}$ である。したがって $5 \mid x, z$ 。

$x = 5x_1, z = 5z_1$ とすれば

$$y^2 = 5(10z_1^2 - 5x_1^2)$$

となるので $5 \mid y^2$ 、したがって $5 \mid y$ である。

(3)

自然数解のうち $x + y + z$ が最小のものを 1 組取る。(2) により

$$(x, y, z) = 5(x_1, y_1, z_1)$$

と書ける。両辺を 25 で割ると (x_1, y_1, z_1) も同じ方程式の自然数解である。しかし

$$x_1 + y_1 + z_1 = \frac{x + y + z}{5} < x + y + z$$

となり、選び方の最小性に反する。よって自然数解は存在しない。

【総評】 難度 6、目安時間 20 分。平方剰余の集合 $\{0, 1, 4\}$ と、その 2 倍 $\{0, 2, 3\}$ の共通部分が $\{0\}$ であることが核心である。 x, z が 5 の倍数と分かった後に式を一度整理し、 y も 5 の倍数と示してから降下する。『すべて 5 の倍数』だけでは矛盾ではなく、同型のより小さい解が得られるところまで書く。

■ 【第 2 問】 ■

複素数 α, β に対し、複素数平面上の点

$$O(0), \quad A(\alpha), \quad B(\beta), \quad C(|\alpha|^2), \quad D(\bar{\alpha}\beta)$$

を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また、複素数 z の虚部を $\text{Im}(z)$ と表す。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 、 $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき、 S_2/S_1 を求めよ。

(2) $S_1 = \frac{1}{2} |\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ であることを示せ。

(3) 実数 a, b に対して $z = a + bi$ とする。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき、3 点 $O(0), P(z), Q(1/z)$ を頂点とする三角形の面積の最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (複素数の乗法を相似変換として見る)

【方針】

(1) は全点へ $\bar{\alpha}$ を掛ける相似変換を考える。(2) は $\alpha = p + qi, \beta = r + si$ と座標化する。(3) は面積を $ab/(a^2 + b^2)$ に直し、比 b/a の 1 変数関数にする。

【解答】

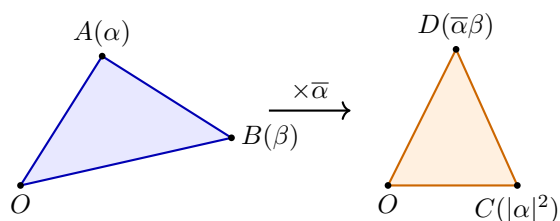
(1)

複素数平面で全点に $\bar{\alpha}$ を掛けると、

$$0 \mapsto 0, \quad \alpha \mapsto |\alpha|^2, \quad \beta \mapsto \bar{\alpha}\beta.$$

したがって $\triangle OAB$ は $\triangle OCD$ に移る。この変換は長さを $|\alpha|$ 倍するので、面積を $|\alpha|^2$ 倍する。よって

$$\frac{S_2}{S_1} = |\alpha|^2.$$



(2)

$\alpha = p + qi$, $\beta = r + si$ とおく。座標平面の三角形の面積公式から

$$S_1 = \frac{1}{2}|ps - qr|.$$

一方、

$$\bar{\alpha}\beta = (p - qi)(r + si) = pr + qs + (ps - qr)i$$

だから

$$S_1 = \frac{1}{2}|\operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)|.$$

(3)

(2) を $\alpha = z$, $\beta = 1/z$ に用いると、面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right|.$$

$z = a + bi$ より

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2}$$

なので

$$S = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

$r = b/a$ とおけば $1/2 \leq r \leq 3$ で、

$$S = \frac{r}{1 + r^2}, \quad S'(r) = \frac{1 - r^2}{(1 + r^2)^2}.$$

したがって $r = 1$ で最大となる。また両端を比較すると

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}, \quad S(3) = \frac{3}{10}.$$

よって

$$\max S = \frac{1}{2}, \quad \min S = \frac{3}{10}.$$

最大値は例えば $a = b = 1$ 、最小値は $(a, b) = (1, 3)$ で実現する。

▶ 解法 2 (行列式で面積を直接計算する)

【方針】

複素数を平面ベクトルとみなし、2 本のベクトルの行列式で面積を表す。(1) は乗法写像の行列式、(2)(3) は座標をそのまま代入して処理する。

【解答】

(1)

$\alpha = u + vi$ とすると、写像 $w \mapsto \bar{\alpha}w$ の実行列は

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

であり、その行列式は

$$u^2 + v^2 = |\alpha|^2.$$

面積は行列式の絶対値倍になるので $S_2/S_1 = |\alpha|^2$ である。

(2)

$\alpha = p + qi, \beta = r + si$ に対応するベクトルは $(p, q), (r, s)$ である。よって

$$S_1 = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |ps - qr|.$$

また $ps - qr = \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)$ だから、所要の式を得る。

(3)

$$P = (a, b), \quad Q = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| a \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right) - b \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) \right| \\ &= \frac{ab}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

ここで相加相乗平均から

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

なので $S \leq 1/2$ であり、 $a = b$ のとき等号が成立する。一方 $r = b/a \in [1/2, 3]$ とすると $S = r/(1 + r^2)$ で、 $r = 1$ から離れるほど小さくなる。端点比較により最小値は $r = 3$ のときの $3/10$ である。

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。 $C = |\alpha|^2 = \bar{\alpha}\alpha$ 、 $D = \bar{\alpha}\beta$ なので、(1) の 2 三角形は同じ複素数を掛ける変換で結ばれる。(3) では a, b を別々に微分するより、面積が比 $r = b/a$ だけで決まることを見抜くと簡潔である。最大・最小を与える点が許された長方形内に実在することまで確認する。

【第 3 問】

$0 < t < \pi/2$ とする。曲線

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

と x 軸、 y 軸、直線 $x = t$ で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $0 < a < b < \pi/2$ のとき、

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

(2) (1) を用いて

$$\frac{d}{dt} V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

を示せ。

(3) $V(\pi/3)$ を求めよ。

▶ 解法 1 (円環柱ではさんで差商を取る)

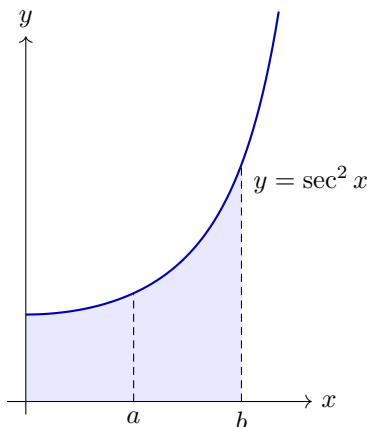
【方針】

$\sec^2 x$ の単調増加性を使い、 $a \leq x \leq b$ の回転部分を高さ $\sec^2 a$ と $\sec^2 b$ の円環柱ではさむ。得た不等式を差商に変え、最後は V' を積分する。

【解答】

(1)

$0 \leq x < \pi/2$ では $1/\cos^2 x$ は単調に増加する。 $V(b) - V(a)$ は、半径 a と b の間の部分を回転してできる体積である。この部分は、高さ $1/\cos^2 a$ の円環柱を含み、高さ $1/\cos^2 b$ の円環柱に含まれる。



円環の底面積は $\pi(b^2 - a^2)$ だから、

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}.$$

(2)

$h > 0$ とし、(1) に $a = t$, $b = t + h$ を代入して h で割ると

$$\pi(2t + h) \frac{1}{\cos^2 t} \leq \frac{V(t + h) - V(t)}{h} \leq \pi(2t + h) \frac{1}{\cos^2(t + h)}.$$

$h \rightarrow +0$ とすれば、はさみうちにより右微分係数は

$$2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}.$$

左側については (1) に $a = t + h$, $b = t$ ($h < 0$) を用いれば同じ極限を得る。したがって

$$V'(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}.$$

(3)

$V(0) = 0$ だから

$$V\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\pi \int_0^{\pi/3} t \frac{1}{\cos^2 t} dt.$$

部分積分により

$$\int t \frac{1}{\cos^2 t} dt = t \tan t + \log(\cos t).$$

よって

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi [t \tan t + \log(\cos t)]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi^2 - 2\pi \log 2. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (円筒殻の積分式から統一的に示す)

【方針】

半径 x 、厚さ dx 、高さ $\sec^2 x$ の円筒殻を積み重ね、

$$V(t) = 2\pi \int_0^t x \sec^2 x dx$$

を得る。この式から (1) の評価、(2) の微分、(3) の値を順に導く。

【解答】

半径 x 、高さ $1/\cos^2 x$ の薄い円筒殻の体積は

$$2\pi x \frac{1}{\cos^2 x} dx$$

だから、

$$V(t) = 2\pi \int_0^t x \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

(1)

$a \leq x \leq b$ では

$$\frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{1}{\cos^2 x} \leq \frac{1}{\cos^2 b}.$$

正の $2\pi x$ を掛けて $[a, b]$ で積分すると

$$\frac{1}{\cos^2 a} \int_a^b 2\pi x dx \leq V(b) - V(a) \leq \frac{1}{\cos^2 b} \int_a^b 2\pi x dx.$$

ここで

$$\int_a^b 2\pi x dx = \pi(b^2 - a^2)$$

より、所要の不等式を得る。

(2)

積分で定めた関数の微分により

$$V'(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}.$$

これは (1) の差商をはさみうちした結果と一致する。

(3)

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi \int_0^{\pi/3} t \sec^2 t \, dt \\ &= 2\pi [t \tan t + \log(\cos t)]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi^2 - 2\pi \log 2. \end{aligned}$$

【総評】 難度 7、目安時間 25 分。(1) の $\pi(b^2 - a^2)$ は円の面積ではなく、半径 a, b の間の円環の面積である。(2) は右微分だけで終えず左側も同値に確認する。(3) の部分積分では

$$\int \tan t \, dt = -\log(\cos t)$$

なので、結果が $t \tan t + \log(\cos t)$ となる符号に注意する。積分はすべて独立した別行立てで、小さいインライン積分を避けた。

【第 4 問】

正の実数 t に対し、座標平面上の 2 点

$$F(t, 0), \quad F'(3t, 0)$$

からの距離の和が $2\sqrt{2}t$ である点 P の軌跡を C とする。また、直線 $y = x - 1$ を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の範囲を求めよ。

(2) t が (1) の範囲を動くとき、 C と ℓ の 2 共有点および原点 O を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。

▶ 解法 1 (楕円へ直線を代入し判別式を見る)

【方針】

焦点の中点と距離和から楕円の中心・長半径・短半径を求める。直線を代入して得る二次方程式の判別式で (1) を処理し、(2) では 2 解の差を三角形の面積に結び付ける。

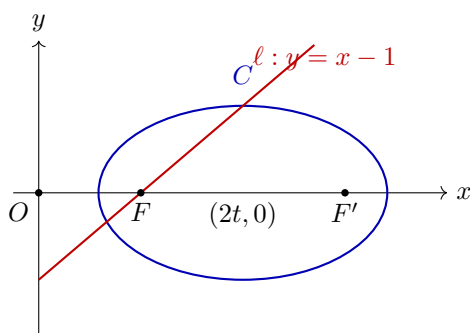
【解答】

焦点の中点は $(2t, 0)$ 、焦点間距離の半分は t である。長半径は $\sqrt{2}t$ だから、短半径は

$$\sqrt{(\sqrt{2}t)^2 - t^2} = t.$$

したがって楕円 C は

$$\frac{(x - 2t)^2}{2t^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1.$$



(1)

$y = x - 1$ を楕円へ代入し、分母を払うと

$$3x^2 - (4t + 4)x + 2t^2 + 2 = 0.$$

相異なる 2 共有点をもつ条件は判別式が正であることから、

$$\begin{aligned} \Delta &= (4t + 4)^2 - 12(2t^2 + 2) \\ &= 8(-t^2 + 4t - 1) > 0. \end{aligned}$$

よって

$$2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}.$$

(2)

2 共有点を

$$P_1 = (x_1, x_1 - 1), \quad P_2 = (x_2, x_2 - 1)$$

とする。原点と作る三角形の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |x_1(x_2 - 1) - x_2(x_1 - 1)| = \frac{1}{2} |x_2 - x_1|.$$

二次方程式の 2 解の差から

$$|x_2 - x_1| = \frac{\sqrt{\Delta}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{-t^2 + 4t - 1}.$$

したがって

$$S(t) = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{-t^2 + 4t - 1} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3 - (t - 2)^2}.$$

これは $t = 2$ で最大となり、

$$\max S = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

▶ 解法 2 (楕円を単位円へ変換する)

【方針】

$X = (x - 2t)/(\sqrt{2}t)$, $Y = y/t$ により楕円を単位円へ移す。直線と円が 2 点で交わる条件を、円の中心から直線までの距離で求める。面積は元の座標で 2 解の差を使う。

【解答】

(1)

座標変換

$$X = \frac{x - 2t}{\sqrt{2}t}, \quad Y = \frac{y}{t}$$

により、楕円は単位円

$$X^2 + Y^2 = 1$$

となる。直線 $y = x - 1$ は

$$Y = \sqrt{2}X + 2 - \frac{1}{t}$$

すなわち

$$\sqrt{2}X - Y + 2 - \frac{1}{t} = 0$$

となる。単位円と相異なる 2 点で交わる条件は、原点からこの直線までの距離が 1 未満であることだから、

$$\frac{|2 - 1/t|}{\sqrt{3}} < 1.$$

$t > 0$ に注意して整理すると

$$2 - \sqrt{3} < \frac{1}{t} < 2 + \sqrt{3}.$$

両端の逆数が互いに入れ替わり、

$$2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}$$

を得る。

(2)

元の座標で共有点の x 座標は

$$3x^2 - (4t + 4)x + 2t^2 + 2 = 0$$

の 2 解である。判別式は $8(-t^2 + 4t - 1)$ だから、解の差と原点を含む三角形の面積は

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{8(-t^2 + 4t - 1)}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3 - (t - 2)^2}.$$

よって $t = 2$ のとき

$$\max S = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。距離和は $2a = 2\sqrt{2}t$ 、焦点間の半分は $c = t$ なので、 $b^2 = a^2 - c^2 = t^2$ となる。判別式の係数整理と、三角形の面積が 2 解の差の半分になる行列式計算が要点である。範囲の端では接するだけなので不等号は厳密に $<$ とする。