

入 学 試 験 問 題

数 学



熊 本 大 学 2020 年 度 数 学 ③

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t により

$$x = \sin t, \quad y = 1 - \cos 3t, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$$

と定める。次の問いに答えよ。

- (1) C 上で x 座標が最大となる点を P 、 y 座標が最大となる点を Q とする。 P, Q の座標を求めよ。
- (2) C 上の点 $(1/2, 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

第 2 問

複素数 α, β に対し、複素数平面上の点

$$O(0), \quad A(\alpha), \quad B(\beta), \quad C(|\alpha|^2), \quad D(\bar{\alpha}\beta)$$

を考える。3点 O, A, B は三角形をなすとする。また、複素数 z の虚部を $\text{Im}(z)$ と表す。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 、 $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき、 S_2/S_1 を求めよ。
- (2) $S_1 = \frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ であることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対して $z = a+bi$ とする。 $1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$ のとき、3点 $O(0), P(z), Q(1/z)$ を頂点とする三角形の面積の最大値と最小値を求めよ。

第 3 問

次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 x に対し、 x^2 を 5 で割った余りは $0, 1, 4$ のいずれかであることを示せ。
- (2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

第 4 問

xy 平面において、 x, y がともに整数である点 (x, y) を格子点という。2 以上の整数 n に対し、

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

を満たす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

を示せ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)/n^2$ を求めよ。

(3) (2) の極限値を L とする。次の不等式を示せ。

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}.$$

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)