

熊本大学 2020 年度 数学③

解答

全 4 問 ——— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t により

$$x = \sin t, \quad y = 1 - \cos 3t, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$$

と定める。次の問いに答えよ。

- (1) C 上で x 座標が最大となる点を P 、 y 座標が最大となる点を Q とする。 P, Q の座標を求めよ。
- (2) C 上の点 $(1/2, 1)$ における接線の方程式を求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

▶ 解法 1 (媒介変数のまま微分・積分する)

【方針】

$x(t), y(t)$ をそれぞれ微分して最大点を求め、接線の傾きは $(dy/dt)/(dx/dt)$ で出す。面積は曲線の進行方向に注意しながら

$$\int y \, dx$$

を媒介変数で計算する。

【解答】

(1)

$$\frac{dx}{dt} = \cos t.$$

区間 $0 \leq t \leq 2\pi/3$ では $t = \pi/2$ のとき $x = \sin t$ が最大となる。このとき $y = 1 - \cos(3\pi/2) = 1$ だから

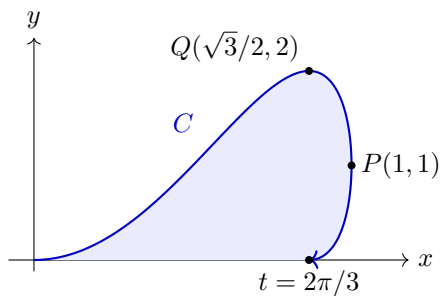
$$P = (1, 1).$$

また

$$\frac{dy}{dt} = 3 \sin 3t$$

で、 $y = 1 - \cos 3t$ は $3t = \pi$ 、すなわち $t = \pi/3$ で最大値 2 を取る。よって

$$Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2 \right).$$



(2)

$\sin t = 1/2$ かつ指定区間内で $y = 1$ となるのは $t = \pi/6$ である。このとき

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \sin 3t}{\cos t} = \frac{3}{\sqrt{3}/2} = 2\sqrt{3}.$$

したがって接線は

$$y - 1 = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2} \right).$$

(3)

$0 \leq t \leq \pi/2$ では x は増加し、 $\pi/2 \leq t \leq 2\pi/3$ では減少する。曲線と x 軸が囲む面積は、曲線の向きを含めた積分として

$$S = \int_0^{2\pi/3} (1 - \cos 3t) \cos t \, dt$$

で与えられる。積和公式

$$\cos 3t \cos t = \frac{1}{2} (\cos 2t + \cos 4t)$$

を使うと

$$\begin{aligned} S &= \left[\sin t - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 4t \right]_0^{2\pi/3} \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

▶ 解法 2 (増加枝と減少枝に分けて面積を確認する)

【方針】

(1)(2) は増減表と媒介変数の微分で処理する。(3) は $t = \pi/2$ で曲線を 2 枝に分け、『上側の面積 - 折り返し部分』として積分を組み立て、符号を幾何的に確認する。

【解答】

(1)

$x'(t) = \cos t$ の符号は $t = \pi/2$ で正から負へ変わるので、 $P = (1, 1)$ である。 $y'(t) = 3 \sin 3t$ は $t = \pi/3$ で正から負へ変わるので、 $Q = (\sqrt{3}/2, 2)$ である。

(2)

指定点に対応する t は $\pi/6$ であり、

$$\left. \frac{dy/dt}{dx/dt} \right|_{t=\pi/6} = 2\sqrt{3}.$$

よって

$$y = 2\sqrt{3}x - \sqrt{3} + 1.$$

(3)

$0 \leq t \leq \pi/2$ の枝は $x = 0$ から $x = 1$ へ進む。折り返す枝は $t = 2\pi/3$ から $t = \pi/2$ へ逆向きにたどると、 $x = \sqrt{3}/2$ から $x = 1$ へ進む。したがって面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 3t) \cos t \, dt - \int_{2\pi/3}^{\pi/2} (1 - \cos 3t) \cos t \, dt \\ &= \int_0^{2\pi/3} (1 - \cos 3t) \cos t \, dt. \end{aligned}$$

この表示により、 $t > \pi/2$ で $dx/dt < 0$ となる折り返し部分も正しい向きで差し引かれている。積和公式で積分すれば

$$S = \left[\sin t - \frac{1}{4} \sin 2t - \frac{1}{8} \sin 4t \right]_0^{2\pi/3} = \frac{9\sqrt{3}}{16}.$$

【総評】 難度 6、目安時間 22 分。 x は $t = \pi/2$ 以後に減少するため、(3) を単純な『 $x = 0$ から終点までの関数の下の面積』とは扱えない。図で折り返しを確認し、増加枝から減少枝の下側部分を引くと

$$\int_0^{2\pi/3} y(t)x'(t) \, dt$$

にまとまる。接線では指定点に対応する t が区間内で一意であることも確認する。

【第 2 問】

複素数 α, β に対し、複素数平面上の点

$$O(0), \quad A(\alpha), \quad B(\beta), \quad C(|\alpha|^2), \quad D(\bar{\alpha}\beta)$$

を考える。3 点 O, A, B は三角形をなすとする。また、複素数 z の虚部を $\text{Im}(z)$ と表す。次の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 、 $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき、 S_2/S_1 を求めよ。
- (2) $S_1 = \frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ であることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対して $z = a + bi$ とする。 $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき、3 点 $O(0), P(z), Q(1/z)$ を頂点とする三角形の面積の最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (複素数の乗法を相似変換として見る)

【方針】

(1) は全点へ $\bar{\alpha}$ を掛ける相似変換を考える。(2) は $\alpha = p + qi, \beta = r + si$ と座標化する。(3) は面積を $ab/(a^2 + b^2)$ に直し、比 b/a の 1 変数関数にする。

【解答】

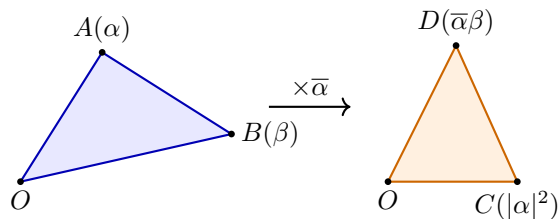
(1)

複素数平面で全点に $\bar{\alpha}$ を掛けると、

$$0 \mapsto 0, \quad \alpha \mapsto |\alpha|^2, \quad \beta \mapsto \bar{\alpha}\beta.$$

したがって $\triangle OAB$ は $\triangle OCD$ に移る。この変換は長さを $|\alpha|$ 倍するので、面積を $|\alpha|^2$ 倍する。よって

$$\frac{S_2}{S_1} = |\alpha|^2.$$



(2)

$\alpha = p + qi, \beta = r + si$ とおく。座標平面の三角形の面積公式から

$$S_1 = \frac{1}{2}|ps - qr|.$$

一方、

$$\bar{\alpha}\beta = (p - qi)(r + si) = pr + qs + (ps - qr)i$$

だから

$$S_1 = \frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|.$$

(3)

(2) を $\alpha = z, \beta = 1/z$ に用いると、面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \left| \text{Im} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) \right|.$$

$z = a + bi$ より

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{(a - bi)^2}{a^2 + b^2}$$

なので

$$S = \frac{ab}{a^2 + b^2}.$$

$r = b/a$ とおけば $1/2 \leq r \leq 3$ で、

$$S = \frac{r}{1+r^2}, \quad S'(r) = \frac{1-r^2}{(1+r^2)^2}.$$

したがって $r = 1$ で最大となる。また両端を比較すると

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5}, \quad S(3) = \frac{3}{10}.$$

よって

$$\max S = \frac{1}{2}, \quad \min S = \frac{3}{10}.$$

最大値は例えば $a = b = 1$ 、最小値は $(a, b) = (1, 3)$ で実現する。

▶ 解法 2 (行列式で面積を直接計算する)

【方針】

複素数を平面ベクトルとみなし、2本のベクトルの行列式で面積を表す。(1) は乗法写像の行列式、(2)(3) は座標をそのまま代入して処理する。

【解答】

(1)

$\bar{\alpha} = u + vi$ とすると、写像 $w \mapsto \bar{\alpha}w$ の実行列は

$$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

であり、その行列式は

$$u^2 + v^2 = |\alpha|^2.$$

面積は行列式の絶対値倍になるので $S_2/S_1 = |\alpha|^2$ である。

(2)

$\alpha = p + qi, \beta = r + si$ に対応するベクトルは $(p, q), (r, s)$ である。よって

$$S_1 = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |ps - qr|.$$

また $ps - qr = \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta)$ だから、所要の式を得る。

(3)

$$P = (a, b), \quad Q = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \left| a \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right) - b \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) \right| \\ &= \frac{ab}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

ここで相加相乗平均から

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

なので $S \leq 1/2$ であり、 $a = b$ のとき等号が成立する。一方 $r = b/a \in [1/2, 3]$ とすると $S = r/(1+r^2)$ で、 $r = 1$ から離れるほど小さくなる。端点比較により最小値は $r = 3$ のときの $3/10$ である。

【総評】 難度 6、目安時間 25 分。 $C = |\alpha|^2 = \bar{\alpha}\alpha$ 、 $D = \bar{\alpha}\beta$ なので、(1) の 2 三角形は同じ複素数を掛ける変換で結ばれる。(3) では a, b を別々に微分するより、面積が比 $r = b/a$ だけで決まることを見抜くと簡潔である。最大・最小を与える点が許された長方形内に実在することまで確認する。

【第 3 問】

次の問いに答えよ。

- (1) 自然数 x に対し、 x^2 を 5 で割った余りは 0, 1, 4 のいずれかであることを示せ。
 (2) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

▶ 解法 1 (5 を法として無限降下する)

【方針】

(1) で平方剰余を確定する。(2) では方程式を 5 で見て x, z 、続いて y も 5 の倍数になることを示し、同じ議論を無限に反復できる矛盾を導く。

【解答】

(1)

x を 5 で割った余りを 0, 1, 2, 3, 4 とすると、その平方の余りは順に

$$0, 1, 4, 4, 1$$

である。したがって

$$x^2 \text{ の余りは } 0, 1, 4 \text{ のいずれか}$$

である。

(2)

自然数解が存在すると仮定する。方程式を 5 を法として見ると

$$x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}.$$

(1) より、左辺の候補は 0, 1, 4、右辺の候補は 0, 2, 3 である。共通するのは 0 だけなので

$$5 \mid x, \quad 5 \mid z.$$

$x = 5x_1, z = 5z_1$ と置くと

$$5x_1^2 + y^2 = 10z_1^2$$

となり、 $y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ だから $5 \mid y$ である。よって

$$x = 5x_1, \quad y = 5y_1, \quad z = 5z_1.$$

元の式を 25 で割ると

$$x_1^2 + 5y_1^2 = 2z_1^2$$

となり、 (x_1, y_1, z_1) も自然数解である。この操作を繰り返すと x, y, z は任意の 5^m で割り切れることになり、正の自然数であることに反する。したがって

自然数解は存在しない。

▶ 解法 2 (最小の解を選ぶ)

【方針】

平方剰余の結論を使い、自然数解があれば 3 成分がすべて 5 の倍数になることを示す。 z が最小の解を選ぶと、5 で割った新しい解の第 3 成分がさらに小さくなり矛盾する。

【解答】

(1)

$$0^2 \equiv 0, \quad (\pm 1)^2 \equiv 1, \quad (\pm 2)^2 \equiv 4 \pmod{5}$$

だから、平方剰余は $0, 1, 4$ だけである。

(2)

自然数解のうち z が最小のものを取る。 $x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$ と平方剰余を比較すると、 x, z は 5 の倍数である。 $x = 5x_1, z = 5z_1$ を代入した式

$$5x_1^2 + y^2 = 10z_1^2$$

から y も 5 の倍数である。そこで $y = 5y_1$ とすれば

$$x_1^2 + 5y_1^2 = 2z_1^2.$$

しかし $z_1 = z/5 < z$ であり、 (x_1, y_1, z_1) はより小さい自然数解となる。これは z の最小性に反するので、自然数解は存在しない。

【総評】 難度 5、目安時間 15 分。数学②第 1 問と同じ方程式だが、医学科用の数学③では『全変数が 5 の倍数』を独立小問にせず、(2) の証明中に組み込む構成である。平方剰余の比較から x, z を先に 5 の倍数とし、代入後に y を処理する順序を守る。

【第 4 問】

xy 平面において、 x, y がともに整数である点 (x, y) を格子点という。2 以上の整数 n に対し、

$$0 < x < n, \quad 1 < 2^y < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

を満たす格子点 (x, y) の個数を $P(n)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left\{ n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right) - 1 \right\} \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

を示せ。

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)/n^2$ を求めよ。

(3) (2) の極限値を L とする。次の不等式を示せ。

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}.$$

▶ 解法 1 (格子点数をリーマン和ではさむ)

【方針】

整数 $x = k$ ごとに許される正整数 y の個数を評価して (1) を得る。(2) は評価を n^2 で割ってリーマン和へ移し、(3) は $f(x) = \log_2(1+x)$ の狭義凹性による台形公式の向きを使う。

【解答】

(1)

$x = k$ ($1 \leq k \leq n-1$) と固定する。与えられた不等式は

$$0 < y < n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

と同値である。正の実数 M に対し、 $0 < y < M$ を満たす整数 y の個数を $N(M)$ とすれば

$$M - 1 \leq N(M) < M.$$

ここで

$$M_k = n \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

と置き、 $k = 1, 2, \dots, n-1$ について足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n-1} (M_k - 1) \leq P(n) < \sum_{k=1}^{n-1} M_k,$$

すなわち所要の不等式を得る。

(2)

(1) を n^2 で割る。上下の評価の差は

$$\frac{n-1}{n^2} \rightarrow 0.$$

また

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} M_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \log_2 \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

は $f(x) = \log_2(1+x)$ の $[0, 1]$ におけるリーマン和である。したがって

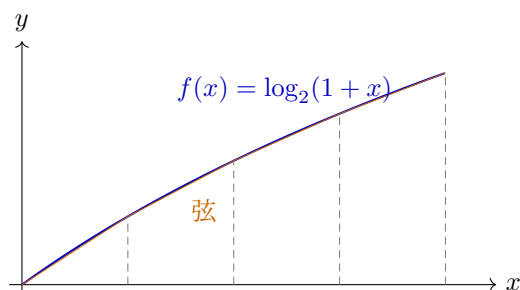
$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \log_2(1+x) dx \\ &= \frac{1}{\log 2} \int_0^1 \log(1+x) dx \\ &= \frac{1}{\log 2} [(1+x) \log(1+x) - (1+x)]_0^1 \\ &= 2 - \frac{1}{\log 2}. \end{aligned}$$

ここで $\log$ は自然対数である。

(3)

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2 \log 2} < 0$$

だから、 f は $[0, 1]$ で狭義凹である。したがって各小区間でグラフは両端を結ぶ弦より上にある。



小区間ごとの台形の面積を足すと

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 f(x) dx > \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{2} f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2} f(1) \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}, \end{aligned}$$

ただし $f(0) = 0, f(1) = 1$ を使った。一方、(1) の上側評価から

$$\frac{P(n)}{n^2} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

2 式を合わせて

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

を得る。

▶ 解法 2 (天井関数で正確に数え、弦の積分を足す)

【方針】

各縦列の格子点数を $\lceil M_k \rceil - 1$ と正確に表し、そこから (1) を導く。(3) は凹関数の定義に基づく弦の不等式を各小区間で積分し、端点補正 $1/(2n)$ を直接取り出す。

【解答】

(1)

$M_k = n \log_2(1 + k/n)$ と置く。 $0 < y < M_k$ を満たす正整数の個数は

$$N_k = \lceil M_k \rceil - 1$$

である。任意の実数 M_k に対し

$$M_k - 1 \leq \lceil M_k \rceil - 1 < M_k$$

だから、 $P(n) = \sum_{k=1}^{n-1} N_k$ に代入して (1) を得る。

(2)

(1) の両端を n^2 で割ると、誤差は高々 $(n-1)/n^2$ で 0 へ収束する。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{n^2} = \int_0^1 \log_2(1+x) dx = 2 - \frac{1}{\log 2}.$$

(3)

$f(x) = \log_2(1+x)$ は狭義凹である。 $a = k/n$, $b = (k+1)/n$ とし、 $0 < \lambda < 1$ に対して

$$f((1-\lambda)a + \lambda b) > (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

この不等式を $x = (1-\lambda)a + \lambda b$ として小区間上で積分すると

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x) dx > \frac{1}{2n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) \right\}.$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$ について足せば

$$L > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{f(0) + f(1)}{2n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}.$$

さらに (1) より $P(n)/n^2$ はこの和より真に小さいので、所要の

$$L - \frac{P(n)}{n^2} > \frac{1}{2n}$$

が従う。

【総評】 難度 8、目安時間 35 分。(1) は各 $x = k$ における正整数 y の個数を数える問題で、上端が整数のときはその値を含まないことが -1 の理由である。(2) では $\log_2$ と自然対数 $\log$ を区別する。(3) の核心は f が凹なので『積分値が台形和より大きい』ことと、端点 $f(1) = 1$ がちょうど $1/(2n)$ の補正を生む点にある。積分・総和はすべて別行で組み、紙面上でも添字と分数が潰れないようにした。