

入 学 試 験 問 題

数 学



熊 本 大 学 2024 年 度 数 学 ③

入試数学アーカイブ

全 4 問

注 意 事 項

- 1 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開いてはいけません。
- 2 この問題冊子は全部で 6 ページあり、問題は全部で 4 問あります。落丁、乱丁または印刷不鮮明の箇所があったら、監督者に知らせなさい。
- 3 解答には、必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を使用しなさい。
- 4 解答は、問題ごとに解答用紙の指定された箇所へ記入しなさい。
- 5 解答用紙の指定欄に、受験番号、科類、氏名を記入しなさい。指定欄以外に、これらを記入してはいけません。
- 6 解答用紙の解答欄に、関係のない文字、記号、符号などを記入してはいけません。
- 7 この問題冊子の余白は、計算用に使用してもよいが、どのページも切り離してはいけません。
- 8 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

第 1 問

n 個の袋 $A_1, A_2, \dots, A_n$ がある。 $A_k (1 \leq k \leq n)$ の中には白玉が k 個, 黒玉が $n - k$ 個入っている。次の (操作) を考える。

(操作) (操作 1) n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び, それを A とおく。(操作 2) 次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し, 玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。以下の問いに答えよ。

(問 1) $s = 2$ とする。(操作) を行うとき, 白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。

(問 2) $s = 100$ とする。(操作 1) を行った結果, $A = A_k$ であった。このとき,(操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。 $n = 3k$ が成り立つとき, $p(t)$ を最大にする t の値を求めよ。

(問 3) $s = 10$ とする。(操作) を行うとき, 白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

第 2 問

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする。 $AB = 1, \angle BAC = 3\theta$ である $\triangle ABC$ について、辺 BC の中点を D としたとき、 $\angle BAD = 2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $AC = 2 \cos \theta$ であることを示せ。

(問 2) BC を $\cos \theta$ を用いて表せ。

(問 3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

第 3 問

k を実数とし, $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k$ とおく。曲線 $y = f(x) (0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2})$ を C とする。
以下の問いに答えよ。

(問 1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。

(問 2) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 個以上あるような k に対し, $g(k)$ を

$$g(k) = \int_{p_1}^{p_2} f(x) \sin x \, dx$$

と定める。ただし, p_1, p_2 はそれぞれ, 曲線 C と x 軸の共有点の x 座標のうち 1 番小さいもの, 2 番目に小さいものとする。 $g(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

第 4 問

m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $k^2 - l^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 (k, l) の個数を m を用いて表せ。

(問 2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で 3 の倍数でないものを m を用いて表せ。

(問 3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。

計 算 用 紙

(切り離さないで用いよ。)