

熊本大学 2024 年度 数学③

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

n 個の袋 $A_1, A_2, \dots, A_n$ がある。 $A_k (1 \leq k \leq n)$ の中には白玉が k 個、黒玉が $n - k$ 個入っている。次の (操作) を考える。

(操作) (操作 1) n 個の袋から無作為に 1 つの袋を選び、それを A とおく。(操作 2) 次の試行を s 回繰り返す。袋 A から無作為に玉を 1 個取り出し、玉の色を調べてから取り出した玉を袋 A に戻す。以下の問いに答えよ。

(問 1) $s = 2$ とする。(操作) を行うとき、白玉がちょうど 1 回取り出される確率を n を用いて表せ。

(問 2) $s = 100$ とする。(操作 1) を行った結果、 $A = A_k$ であった。このとき、(操作 2) で白玉がちょうど t 回取り出される条件付き確率を $p(t)$ とする。 $n = 3k$ が成り立つとき、 $p(t)$ を最大にする t の値を求めよ。

(問 3) $s = 10$ とする。(操作) を行うとき、白玉がちょうど 3 回取り出される確率を q_n とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

袋 A_k が選ばれたときの白玉確率は k/n である。(問 1) は k について平均し、(問 2) は二項分布の隣接比で最大となる t を決める。(問 3) は平均をリーマン和として

$$\int_0^1 120x^3(1-x)^7 dx$$

に帰着する。

【解答】

(問 1) 袋 A_k が選ばれたとき、白玉が出る確率は k/n である。 $s = 2$ で白玉がちょうど 1 回出る条件付き確率は

$$2 \cdot \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

である。袋は等確率に選ばれるので、求める確率は

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \cdot \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) = \frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^n k(n-k) = \frac{n^2 - 1}{3n^2}$$

である。

(問 2) $n = 3k$ であるから、袋 A_k から白玉が出る確率は $1/3$ である。したがって

$$p(t) = {}_{100}C_t \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(\frac{2}{3}\right)^{100-t}$$

である。隣り合う項の比は

$$\frac{p(t+1)}{p(t)} = \frac{100-t}{t+1} \cdot \frac{1}{2}$$

である。これは $t \leq 32$ で 1 より大きく、 $t \geq 33$ で 1 より小さい。よって $p(t)$ を最大にする t は

$$33$$

である。

(問 3) $s = 10$ で白玉がちょうど 3 回出る確率は

$$q_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n {}_{10}C_3 \left(\frac{k}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^7$$

である。これはリーマン和であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 120 \int_0^1 x^3(1-x)^7 dx$$

である。ここで

$$(1-x)^7 = 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7$$

を用いて計算すると

$$\int_0^1 x^3(1-x)^7 dx = \frac{1}{1320}$$

である。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{120}{1320} = \frac{1}{11}$$

である。

▶ 解法 2 (平均とべき和の極限)

【方針】

袋番号を一様な確率変数 K とみなし、白玉確率 K/n について平均する。(問 2) は二項確率の前後比を両側から比較し、(問 3) は $(1 - k/n)^7$ を展開して各べき和の極限を用いる。

【解答】

(問 1) K を選ばれた袋番号とすると K は $1, \dots, n$ 上で一様である。 $K = k$ のもとで白玉がちょうど 1 回出る確率は $2(k/n)(1 - k/n)$ だから

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2 \frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \\ &= \frac{2}{n^3} \left(n \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{n^2 - 1}{3n^2}. \end{aligned}$$

(問 2) $n = 3k$ なら 1 回の白玉確率は $1/3$ なので

$$p(t) = {}_{100}C_t \left(\frac{1}{3}\right)^t \left(\frac{2}{3}\right)^{100-t}.$$

最大の項では $p(t) \geq p(t-1)$ かつ $p(t) \geq p(t+1)$ である。隣接比から

$$\frac{p(t)}{p(t-1)} = \frac{101-t}{2t}, \quad \frac{p(t+1)}{p(t)} = \frac{100-t}{2(t+1)}.$$

両条件を満たす整数は $t = 33$ だけである。よって最大にする値は

$$t = 33.$$

(問 3)

$$q_n = \frac{120}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^7.$$

二項展開し、各 $j \geq 0$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^j = \frac{1}{j+1}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} q_n &= 120 \sum_{j=0}^7 (-1)^j {}_7C_j \frac{1}{j+4} \\ &= 120 \int_0^1 x^3(1-x)^7 dx \\ &= 120 \cdot \frac{1}{1320} = \frac{1}{11}. \end{aligned}$$

展開によるべき和計算と積分値が同じ有限和を与える。

【総評】 難度 6、計算量 6、想定 25 分。袋番号を固定した条件付き確率を最後に平均する。(問 2) は二項分布の隣接比から最頻値 33 を確定する。(問 3) は解法 1 のリーマン和と、解法 2 の二項展開・べき和極限がともに

$$120 \int_0^1 x^3(1-x)^7 dx = 1/11$$

を与え、有限和の係数まで相互確認できる。

【第 2 問】

$0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ とする。 $AB = 1, \angle BAC = 3\theta$ である $\triangle ABC$ について、辺 BC の中点を D としたとき、 $\angle BAD = 2\theta$ が成り立つとする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $AC = 2 \cos \theta$ であることを示せ。

(問 2) BC を $\cos \theta$ を用いて表せ。

(問 3) BC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

A を原点、 AB を x 軸に置き、 $AC = x$ として中点 D の方向角が 2θ であることを式にする。 AC を求めた後、余弦定理で BC^2 を $\cos \theta$ の二次式に直し、最大値は $u = \cos^2 \theta$ で処理する。

【解答】

(問 1) $AC = x$ とする。点 A を原点、 AB を x 軸上にとると

$$B = (1, 0), \quad C = (x \cos 3\theta, x \sin 3\theta)$$

である。 D は BC の中点なので

$$D = \left(\frac{1 + x \cos 3\theta}{2}, \frac{x \sin 3\theta}{2} \right)$$

である。 $\angle BAD = 2\theta$ より

$$\tan 2\theta = \frac{x \sin 3\theta}{1 + x \cos 3\theta}$$

である。したがって

$$\sin 2\theta(1 + x \cos 3\theta) = x \cos 2\theta \sin 3\theta$$

であり、整理すると

$$\sin 2\theta = x \sin \theta$$

となる。 $0 < \theta < \pi/3$ より $\sin \theta > 0$ なので

$$AC = x = 2 \cos \theta$$

である。

(問 2) 余弦定理より

$$BC^2 = 1 + (2 \cos \theta)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos \theta \cos 3\theta$$

である。 $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ を用いると

$$BC^2 = 1 + 16 \cos^2 \theta - 16 \cos^4 \theta$$

である。したがって

$$BC = \sqrt{1 + 16 \cos^2 \theta - 16 \cos^4 \theta}$$

である。

(問 3) $u = \cos^2 \theta$ とおくと、 $0 < \theta < \pi/3$ より $1/4 < u < 1$ であり

$$BC^2 = -16u^2 + 16u + 1$$

である。この二次式は $u = 1/2$ で最大となる。よって

$$BC^2 = 5$$

であり、最大値は $\sqrt{5}$ である。このとき $\cos^2 \theta = 1/2$ で、範囲より

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

である。

▶ 解法 2 (正弦定理と平方完成)

【方針】

$BD = CD$ を、 $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の正弦定理で表すと AC が直ちに決まる。続いて余弦定理で BC^2 を求め、 $u = \cos^2 \theta$ について平方完成して最大値を読む。

【解答】

(問 1) $\alpha = \angle ADB$ とおく。 B, D, C は一直線上にあるから $\angle ADC = \pi - \alpha$ である。正弦定理より

$$\triangle ABD: \quad BD = \frac{\sin 2\theta}{\sin \alpha},$$

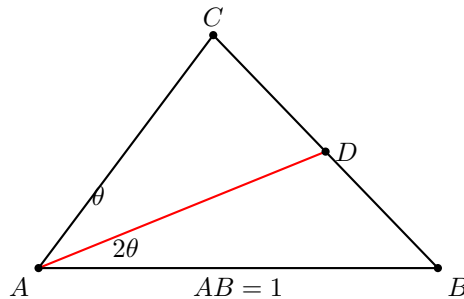
$$\triangle ACD: \quad CD = AC \frac{\sin \theta}{\sin(\pi - \alpha)} = AC \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}.$$

D は BC の中点なので $BD = CD$ である。したがって

$$\sin 2\theta = AC \sin \theta.$$

$0 < \theta < \pi/3$ より $\sin \theta > 0$ であり、

$$AC = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta} = 2 \cos \theta.$$



(問 2) $\angle BAC = 3\theta$ なので余弦定理から

$$BC^2 = 1 + 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \cos 3\theta.$$

$\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ を代入し、

$$BC = \sqrt{1 + 16 \cos^2 \theta - 16 \cos^4 \theta}.$$

(問 3) $u = \cos^2 \theta$ とすると $1/4 < u < 1$ であり、

$$BC^2 = 1 + 16u - 16u^2 = 5 - 16 \left(u - \frac{1}{2} \right)^2.$$

$u = 1/2$ は範囲内にあるから、最大値は $BC^2 = 5$ 、すなわち

$$BC_{\max} = \sqrt{5}.$$

このとき $\cos^2 \theta = 1/2$ で、指定範囲より

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

【総評】 難度 5、計算量 5、想定 20 分。中線の角条件を長さへ変換するのが要点である。解法 1 は中点座標の方向角、解法 2 は 2 つの三角形への正弦定理で $AC = 2 \cos \theta$ を導いた。後半は余弦定理と平方完成により、両解法とも $BC_{\max} = \sqrt{5}, \theta = \pi/4$ に一致する。

【第 3 問】

k を実数とし、 $f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k$ とおく。曲線 $y = f(x) (0 \leq x \leq \frac{3\pi}{2})$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) 曲線 C と x 軸の共有点の個数が k の値によってどのように変わるか調べよ。

(問 2) 曲線 C と x 軸の共有点が 2 個以上あるような k に対し、 $g(k)$ を

$$g(k) = \int_{p_1}^{p_2} f(x) \sin x \, dx$$

と定める。ただし、 p_1, p_2 はそれぞれ、曲線 C と x 軸の共有点の x 座標のうち 1 番小さいもの、2 番目に小さいものとする。 $g(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

▶ 解法 1 (標準解法)

【方針】

$u = \cos x$ とおくと $f(x) = k - u^2 - u$ となる。まず $u \in [-1, 1]$ での二次方程式の根と、区間 $[0, 3\pi/2]$ における $\cos x = u$ の解の個数を数える。(問 2) は最初の二つの解が $\cos x$ の二つの根に対応するので、 u で積分して根の間の放物線面積にする。

【解答】

(問 1) $u = \cos x$ とおくと

$$f(x) = \sin^2 x - \cos x - 1 + k = k - u^2 - u$$

である。共有点は

$$u^2 + u - k = 0$$

を満たす $u = \cos x$ に対応する。 $u^2 + u$ の $-1 \leq u \leq 1$ での値域は

$$-\frac{1}{4} \leq u^2 + u \leq 2$$

である。

$k < -1/4$ または $k > 2$ では共有点はない。

$k = -1/4$ では $u = -1/2$ であり、 $[0, 3\pi/2]$ に解は 2 個ある。

$-1/4 < k < 0$ では二つの根がともに $(-1, 0)$ にある。それぞれに対し $[0, 3\pi/2]$ に解が 2 個あるので、共有点は 4 個である。

$k = 0$ では $u = -1, 0$ であり、解の個数は $1 + 2 = 3$ 個である。

$0 < k < 2$ では一つの根だけが $(0, 1)$ にあるので、共有点は 1 個である。 $k = 2$ では $u = 1$ に対応し、共有点は 1 個である。

(問 2) 共有点が 2 個以上あるのは

$$-\frac{1}{4} \leq k \leq 0$$

である。方程式 $u^2 + u - k = 0$ の二つの根を $r_1 \leq r_2$ とすると

$$r_2 - r_1 = \sqrt{1 + 4k}$$

である。最初の二つの共有点に対応する u の値は r_2, r_1 であるから、 $u = \cos x$ 、 $du = -\sin x \, dx$ により

$$g(k) = \int_{r_1}^{r_2} (k - u^2 - u) \, du$$

である。これは根の間の下に凸な二次式の面積であり、

$$g(k) = \int_{r_1}^{r_2} (u - r_1)(r_2 - u) \, du = \frac{(r_2 - r_1)^3}{6} = \frac{(1 + 4k)^{3/2}}{6}$$

である。したがって $-1/4 \leq k \leq 0$ で

$$\min g(k) = 0, \quad \max g(k) = \frac{1}{6}$$

である。

▶ 解法 2 (二次関数のグラフと平方完成)

【方針】

$h(u) = u^2 + u$ のグラフと $u = \cos x$ の値のとり方を分離して共有点数を数える。積分では 2 根の中点 $-1/2$ と根間距離を使って被積分関数を平方完成し、対称区間の積分として求める。

【解答】

(問 1) $u = \cos x$ とおけば $f(x) = 0$ は

$$h(u) = u^2 + u = k, \quad -1 \leq u \leq 1$$

となる。 h は $u = -1/2$ で最小値 $-1/4$ をとり、 $h(-1) = h(0) = 0, h(1) = 2$ である。

$u \in (-1, 0)$ に対する $\cos x = u$ は $0 \leq x \leq 3\pi/2$ で 2 解、 $u \in (0, 1)$ では 1 解である。端点も別に数えると、共有点数は

k	$(-\infty, -1/4)$	$-1/4$	$(-1/4, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
個数	0	2	4	3	1	1	0

である。

(問 2) 対象は $-1/4 \leq k \leq 0$ である。2 根を $r_1 \leq r_2$ 、根間距離を

$$d = r_2 - r_1 = \sqrt{1 + 4k}$$

とする。 $u = \cos x$ 、 $du = -\sin x dx$ より、最初の 2 共有点の間では

$$g(k) = \int_{r_1}^{r_2} (k - u^2 - u) du.$$

根の中点は $-1/2$ なので $v = u + 1/2$ とおけば、積分区間は $[-d/2, d/2]$ 、被積分関数は $d^2/4 - v^2$ である。したがって

$$\begin{aligned} g(k) &= \int_{-d/2}^{d/2} \left(\frac{d^2}{4} - v^2 \right) dv = \frac{d^3}{6} \\ &= \frac{(1 + 4k)^{3/2}}{6}. \end{aligned}$$

これは k について増加するから

$$\min g(k) = g(-1/4) = 0, \quad \max g(k) = g(0) = \frac{1}{6}.$$

【総評】 難度 7、計算量 6、想定 30 分。 $u = \cos x$ に対する二次方程式の根数と、各 u に対する区間内の x の個数を分けて数える。解法 1 は根の位置、解法 2 は $h(u) = u^2 + u$ のグラフで 7 区分を整理した。積分は根間の放物線面積と平方完成の 2 通りで $g(k) = (1 + 4k)^{3/2}/6$ に一致する。

【第 4 問】

m を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) $k^2 - l^2 = 3^m$ を満たす自然数の組 (k, l) の個数を m を用いて表せ。

(問 2) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x で 3 の倍数でないものを m を用いて表せ。

(問 3) $\sqrt{x(x+3^m)}$ が整数となるような自然数 x の個数を m を用いて表せ。

▶ 解法 1 (最大公約数で互いに素な平方へ分離)

【方針】

(問 1) は差の平方を 3 のべきの因数対に分ける。(問 2)(問 3) は $d = \gcd(x, x+3^m)$ を取り、 d で割った互いに素な 2 数の積が平方数であることから、それぞれを平方数とする。互いに素という条件まで使って因数対を一意に絞る。

【解答】

(問 1)

$$(k-l)(k+l) = 3^m$$

である。 $0 < k-l < k+l$ より

$$k-l = 3^a, \quad k+l = 3^{m-a}, \quad 0 \leq a < \frac{m}{2}.$$

$m = 2s-1$ または $m = 2s$ のとき、 $a = 0, 1, \dots, s-1$ の s 通りである。逆に各 a から

$$k = \frac{3^{m-a} + 3^a}{2}, \quad l = \frac{3^{m-a} - 3^a}{2}$$

が得られるので、個数は s である。

(問 2) $3 \nmid x$ なら $\gcd(x, x+3^m) = 1$ である。積が平方数なので

$$x = l^2, \quad x+3^m = k^2$$

と書ける。よって $k^2 - l^2 = 3^m$ である。(問 1) の因数表示で l が 3 の倍数でないためには $a = 0$ でなければならない。したがって

$$x = \left(\frac{3^m - 1}{2} \right)^2.$$

(問 3) $d = \gcd(x, x+3^m) = 3^r$ とおく。 $x = 3^r X$, $x+3^m = 3^r Y$ とすれば $\gcd(X, Y) = 1$ である。積 XY は平方数なので

$$X = l^2, \quad Y = k^2, \quad \gcd(k, l) = 1.$$

$r = m$ では $k^2 - l^2 = 1$ となり自然数解がないため、 $0 \leq r \leq m-1$ である。 $t = m-r$ とおくと

$$(k-l)(k+l) = 3^t.$$

k, l が互いに素なので、2 因子の共通の 3 の指数は 0 でなければならない。ゆえに

$$k-l = 1, \quad k+l = 3^t,$$

となり、固定した r ごとに解はただ 1 つ、

$$x = 3^r \left(\frac{3^{m-r} - 1}{2} \right)^2$$

である。 $r = 0, 1, \dots, m-1$ でこれらは互いに異なるから、個数は

$$m$$

である。

▶ 解法 2 (差の平方を直接因数分解)

【方針】

(問 1) は $(k-l)(k+l)$ 、(問 3) は $(2x+3^m)^2 - (2y)^2$ を因数分解する。後者の 2 因子は積が 3^{2m} となる正の奇数なので、指数を割り振るだけで全解を重複なく列挙できる。

【解答】

(問 1) $(k-l)(k+l) = 3^m$ で、両因子は正の奇数である。ある整数 a を用いて

$$k-l = 3^a, \quad k+l = 3^{m-a}$$

と表せる。 $k-l < k+l$ より $0 \leq a < m/2$ であり、逆にこの範囲の a ごとに

$$k = \frac{3^{m-a} + 3^a}{2}, \quad l = \frac{3^{m-a} - 3^a}{2}$$

が自然数解を与える。したがって $m = 2s-1, 2s$ のいずれでも個数は s である。

(問 2) $3 \nmid x$ なら $\gcd(x, x+3^m) = 1$ である。積が平方数なので

$$x = l^2, \quad x+3^m = k^2$$

となる。(問 1) の表示で $3 \nmid l$ となるのは $a = 0$ だけだから

$$x = l^2 = \left(\frac{3^m - 1}{2} \right)^2.$$

(問 3) 整数 y を用いて

$$x(x+3^m) = y^2$$

とおく。4 倍して平方完成すると

$$(2x+3^m)^2 - (2y)^2 = 3^{2m},$$

すなわち

$$(2x+3^m-2y)(2x+3^m+2y) = 3^{2m}.$$

左の 2 因子は正の奇数で前者が後者より小さい。したがって、ある整数 r により

$$2x+3^m-2y = 3^r, \quad 2x+3^m+2y = 3^{2m-r},$$

かつ $0 \leq r < m$ と一意に表せる。2 式を加えて

$$x = 3^r \left(\frac{3^{m-r} - 1}{2} \right)^2.$$

逆に各 $r = 0, 1, \dots, m-1$ は自然数解を与える。また括弧内は 3 の倍数でないので各解の x に含まれる 3 の指数は r であり、重複しない。よって求める個数は

$$m$$

である。

【総評】 難度 7、計算量 6、想定 30 分。差の平方の因数分解と、互いに素な積が平方数なら各因子も平方数という事実が中心である。解法 1 は最大公約数で互いに素な平方へ分離し、解法 2 は $(2x+3^m)^2 - (2y)^2 = 3^{2m}$ から全解を直接列挙した。 $m = 1, \dots, 8$ の全探索とも照合し、(問 3) の個数は m で一致する。