

熊本大学 2025 年度 数学③

解答

全 4 問 —— 解 入試数学アーカイブ

【第 1 問】

平面上の 4 点 A, B, C, D について、 $|\overrightarrow{AB}| = p > 0, |\overrightarrow{AD}| = q > 0, \angle DAB = \theta (0 < \theta < \pi)$ とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) 不等式 $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD}|^2 + |\overrightarrow{DA}|^2 \geq |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2$ を証明せよ。

(問 2) (問 1) で等号が成り立つとき、四角形 $ABCD$ の面積を p, q, θ を用いて表せ。

【方針】

点 A を原点とし、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{d}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく。左辺 - 右辺を展開すると $|\vec{c} - \vec{b} - \vec{d}|^2$ になる。等号条件は $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ 、すなわち $ABCD$ が平行四辺形になることを意味する。

【解答】

(問 1) 点 A を原点とし、

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{d}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{c}$$

とおく。このとき

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b}, \quad \overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c}, \quad \overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$$

である。よって与えられた不等式の左辺から右辺を引くと

$$|\vec{b}|^2 + |\vec{c} - \vec{b}|^2 + |\vec{d} - \vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 - |\vec{c}|^2 - |\vec{d} - \vec{b}|^2$$

であり、これを整理すると

$$|\vec{c} - \vec{b} - \vec{d}|^2$$

となる。これは 0 以上であるから、求める不等式が成り立つ。

(問 2) (問 1) で等号が成り立つのは

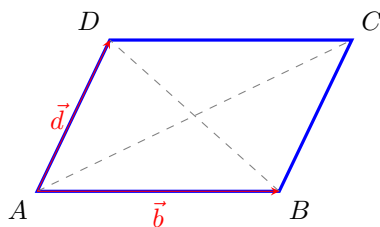
$$\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$$

のときである。このとき四角形 $ABCD$ は、 AB と AD を隣り合う二辺とする平行四辺形である。したがって面積は

$$|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \sin \angle DAB = pq \sin \theta$$

である。

【等号条件の幾何的意味】



$\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ は平行四辺形の対角線法則そのものである。

【総評】 【公式解答例との対応】 公式の展開結果と照合し、左辺 - 右辺が $|\vec{c} - \vec{b} - \vec{d}|^2$ になること、等号時の面積が $pq \sin \theta$ であることを確認した。

難度 4, 計算量 4, 想定時間 12 分。四点の並びを図だけから平行四辺形と仮定してはいけない。まず平方が 0 となる等号条件 $\vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ を得てから、平行四辺形であると結論する。

【独立検算】 任意の二次元ベクトル $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ を代入して恒等式を展開確認した。面積は隣接二辺 $\vec{b}, \vec{d}$ の行列式の絶対値で $pq \sin \theta > 0$ となる。

【第 2 問】

α を 0 ではない複素数とする。 $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ とおき、 $\beta = z\alpha, \gamma = z^2\alpha$ とおく。 $0, \alpha, \beta, \gamma$ はそれぞれ複素数平面上の点 O, A, B, C を表すとする。ただし、 i は虚数単位である。以下の問いに答えよ。

(問 1) $\angle BOC$ を求めよ。

(問 2) 複素数 δ に対し、 δ が表す複素数平面上の点を D とするとき、線分 BD の垂直二等分線は A, C を通るとする。このような δ を α を用いて表せ。

(問 3) $0 < \theta < \pi$ とする。点 D を、点 C を中心に θ だけ回転した点が B であるとする。このとき $\sin \theta$ を求めよ。

【方針】

$z = \sqrt{2}(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6))$ と読む。全点に共通の非零複素数 α を掛ける操作は回転拡大なので、まず $\alpha = 1$ に正規化する。垂直二等分線の条件を直線 AC に関する反射と読み、最後は点 C からの二ベクトルの行列式と長さで $\sin \theta$ を求める。

【解答】

(問 1)

$$z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

である。 $\beta = z\alpha, \gamma = z^2\alpha$ であるから、 OB から OC への偏角の増加は $\pi/6$ である。したがって

$$\angle BOC = \frac{\pi}{6}$$

である。

(問 2) 全体を α で割って考え、最後に α を掛け戻す。すなわち $A = 1, B = z, C = z^2$ としてよい。このとき

$$z^2 = 1 + \sqrt{3}i$$

であり、直線 AC は実部が 1 の直線である。線分 BD の垂直二等分線が A, C を通るには、 D は B を直線 AC について対称移動した点である。したがって

$$D = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

である。よって

$$\delta = \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \alpha$$

である。

(問 3) (問 2) と同じく $\alpha = 1$ として計算する。

$$C = 1 + \sqrt{3}i, \quad B = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad D = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

である。 C から見た二つのベクトルは

$$\overrightarrow{CB} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \right), \quad \overrightarrow{CD} = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \right)$$

であり、長さは等しい。 $a = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1, b = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ とおくと

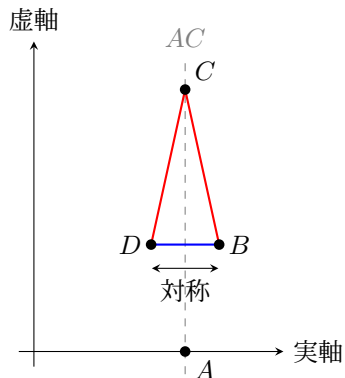
$$\sin \theta = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

である。これを整理して

$$\sin \theta = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$$

を得る。

【正規化後の反射図】



直線 AC は $\operatorname{Re} w = 1$ であり, B, D はこの直線に関して対称である。

【総評】 【公式解答例との対応】 公式解答例の正規化・反射と照合し, $\angle BOC = \pi/6$, $\delta = (2 - \sqrt{6}/2 + \sqrt{2}i/2)\alpha$, $\sin \theta = (3\sqrt{2} - \sqrt{3})/6$ の一致を確認した。

難度 6, 計算量 5, 想定時間 25 分。 $|z| = \sqrt{2}$ であり単位複素数ではないが, 角度には偏角 $\pi/6$ だけが効く。 α は非零なので全体を割る正規化が可能で, 回転拡大は垂直二等分線・角度を保つ。

【独立検算】 正規化後に $|A - B| = |A - D|$, $|C - B| = |C - D|$ を確認した。行列式による正弦を根号体で整理し, 数値 $0.41843\dots$ でも公式値と一致した。

【第 3 問】

xyz 空間において, 5 点 $A(3, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, -3, 0), D(3, 0, 3), P(0, 0, 1)$ をとる。点 P を通り x 軸に平行な直線を l とする。四面体 $ABCD$ を l の周りに 1 回転させるとき, この四面体が通過する部分の体積 V を求めよ。ただし, 四面体は内部も含むものとする。

【方針】

回転軸に垂直な平面 $x = t$ で切る。四面体の断面は yz 平面内の長方形で, 回転軸は点 $(0, 1)$ に見える。長方形をこの点の周りに回転した通過領域について, 軸点が長方形の外か内か, 最遠頂点がどちらかにより $0 \leq t \leq 1$, $1 \leq t \leq 2$, $2 \leq t \leq 3$ に分け, 断面積を積分する。

【解答】

$0 \leq x \leq 3$ で, 四面体を平面 $x = \text{一定}$ で切る。この断面を yz 平面で見ると

$$-(3-x) \leq y \leq 3-x, \quad 0 \leq z \leq x$$

で表される長方形である。回転軸 l はこの断面では点 $(y, z) = (0, 1)$ に対応する。

この長方形を点 $(0, 1)$ の周りに回転したときの面積を $A(x)$ とする。 $0 \leq x \leq 1$ では軸点が長方形の外にあり, 内半径は $1-x$ 、外半径の平方は $(3-x)^2 + 1$ である。したがって

$$A(x) = \pi\{(3-x)^2 + 1 - (1-x)^2\} = \pi(9-4x)$$

である。

$1 \leq x \leq 2$ では軸点が長方形内にあり, 外半径の平方は $(3-x)^2 + 1$ であるから

$$A(x) = \pi\{(3-x)^2 + 1\}$$

である。

$2 \leq x \leq 3$ では軸点が長方形内にあり, 外半径の平方は $(3-x)^2 + (x-1)^2$ であるから

$$A(x) = \pi\{(3-x)^2 + (x-1)^2\}$$

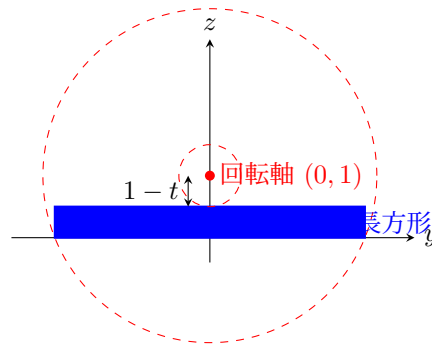
である。

よって求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi(9-4x) dx + \int_1^2 \pi\{(3-x)^2 + 1\} dx + \int_2^3 \pi\{(3-x)^2 + (x-1)^2\} dx \\ &= \pi \left(7 + \frac{10}{3} + \frac{8}{3} \right) = 13\pi \end{aligned}$$

である。

【断面の見取り図】



$0 \leq t < 1$ では回転軸が長方形の外にあるため内円が抜ける。 $t \geq 1$ では軸点を含み、通過領域は円板になる。さらに $t = 2$ で最遠頂点が下端側から上端側へ切り替わる。

【総評】 【公式解答例との対応】 公式の断面法と照合し、三つの断面積 $\pi(9-4t)$, $\pi(t^2-6t+10)$, $\pi(2t^2-8t+10)$ および体積 13π の一致を確認した。

難度 8, 計算量 7, 想定時間 35 分。三次元の回転体を外観から直接求めるのではなく、回転軸に垂直な $x = t$ 断面で処理することが決定的である。 $t = 1$ は軸点が長方形へ入る境界、 $t = 2$ は最遠頂点が切り替わる境界であり、場合分けの根拠が異なる。

【独立検算】 四面体の各面の一次不等式から断面が $|y| \leq 3-t$, $0 \leq z \leq t$ であることを再導出し、各区間の端 $t = 0, 1, 2, 3$ で断面積が連続すること、三積分の値が $7\pi, 10\pi/3, 8\pi/3$ であることを確認した。

【第 4 問】

実数 $p > 1$ と正の整数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^n k^p$ とおく。以下の問いに答えよ。

(問 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}}$ を求めよ。

(問 2) $0 \leq \alpha < \beta$ とする。点 (α, α^p) における $y = x^p$ の接線の方程式を求めよ。また、不等式 $\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\}$

$$\leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p dx$$

$\leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\beta^p + \alpha^p)$ を証明せよ。

(問 3) (問 1) で求めた値を c とおく。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p}$ を求めよ。

▶ 標準解法（凸性の接線・弦評価ではさむ）

【方針】

(問 1) は積分比較で主項を決める。(問 2) では x^p の導関数が増加することから、接線が曲線の下、両端を結ぶ弦が曲線の上にあることを示して積分する。(問 3) はその二つの評価を単位区間ごとに足し、差 $S_n - \frac{n^{p+1}}{p+1}$ を $n^p/2$ へはさむ。

【解答】

(問 1) x^p は $x \geq 0$ で増加するから

$$\int_0^n x^p dx \leq S_n \leq \int_1^{n+1} x^p dx$$

である。したがって

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{S_n}{n^{p+1}} \leq \frac{(n+1)^{p+1} - 1}{(p+1)n^{p+1}}$$

であり、はさみうちにより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

である。

(問 2) $y = x^p$ の $x = \alpha$ における接線は

$$y = \alpha^p + p\alpha^{p-1}(x - \alpha)$$

である。

$\alpha \leq x \leq \beta$ で

$$\phi(x) = x^p - \alpha^p - p\alpha^{p-1}(x - \alpha)$$

とおくと

$$\phi'(x) = p(x^{p-1} - \alpha^{p-1}) \geq 0, \quad \phi(\alpha) = 0$$

である。よって接線は曲線の下側にある。これを積分して

$$\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\{2\alpha^p + p(\beta - \alpha)\alpha^{p-1}\} \leq \int_{\alpha}^{\beta} x^p dx$$

を得る。

また、 $y = x^p$ の導関数は増加するので、曲線は区間 $[\alpha, \beta]$ で弦の下側にある。すなわち

$$x^p \leq \frac{\beta - x}{\beta - \alpha}\alpha^p + \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha}\beta^p$$

である。これを積分して

$$\int_{\alpha}^{\beta} x^p dx \leq \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(\alpha^p + \beta^p)$$

を得る。

(問 3) (問 1) より $c = 1/(p+1)$ である。まず (問 2) の右側の不等式を各区間 $[k-1, k]$ に用いて足すと

$$cn^{p+1} = \int_0^n x^p dx \leq S_n - \frac{1}{2}n^p$$

である。したがって

$$\frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p} \geq \frac{1}{2}$$

である。

次に (問 2) の左側の不等式を各区間 $[j, j+1]$ に用いると

$$\int_j^{j+1} x^p dx \geq j^p + \frac{p}{2}j^{p-1}$$

である。これを $j = 1, 2, \dots, n-1$ について足すと

$$cn^{p+1} \geq S_{n-1} + \frac{p}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j^{p-1}$$

であるから

$$S_n - cn^{p+1} \leq n^p - \frac{p}{2} \sum_{j=1}^{n-1} j^{p-1}$$

である。積分比較により

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \sum_{j=1}^{n-1} j^{p-1} = \frac{1}{p}$$

である。したがって、 $R_n = (S_n - cn^{p+1})/n^p$ とおけば

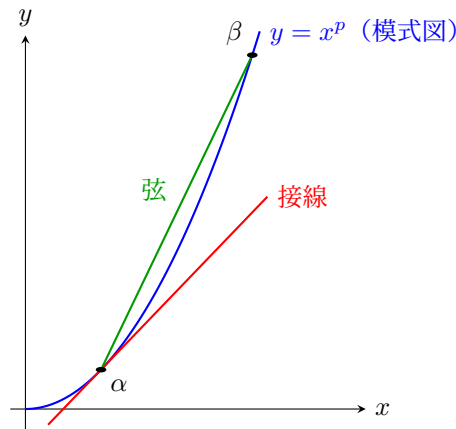
$$\limsup_{n \rightarrow \infty} R_n \leq 1 - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{2}.$$

一方, 先の評価からすべての n で $R_n \geq 1/2$ である。よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n - cn^{p+1}}{n^p} = \frac{1}{2}$$

である。

【接線・弦による評価の図】



凸関数では「接線 $\leq$ 曲線 $\leq$ 弦」である。この向きを単位区間ごとに保ったまま加えることが (問 3) の核心である。

▶ 別解 (問 1: 区分求積法)

【方針】

S_n/n^{p+1} をそのまま $[0, 1]$ 上のリーマン和へ変形する。積分比較とは独立に主項 $1/(p+1)$ を一行で確認できる。

【解答】

(問 1)

$$\frac{S_n}{n^{p+1}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

これは連続関数 x^p の区間 $[0, 1]$ における右端の区分求積であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{p+1}} = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

【総評】 【公式解答例との対応】 公式の区分求積と接線・弦評価に照合し, $c = 1/(p+1)$, 最後の極限 $1/2$ の一致を確認した。標準解法は高校範囲の積分比較だけで完結し, 問 1 には区分求積の別解も付した。

難度 8, 計算量 7, 想定時間 35 分。問 3 では有限の n に対して上側が直ちに $1/2$ 以下になるのではない。下側評価から $R_n \geq 1/2$, 上側評価から $\limsup R_n \leq 1/2$ を得てはさむ, という論理を明示した。

【独立検算】 $p = 2, 3, 3/2$ で数値計算し, $(S_n - n^{p+1}/(p+1))/n^p \rightarrow 1/2$ を確認した。接線・弦の向きは $p > 1$ による凸性で保証され, $\alpha = 0$ でも $\alpha^{p-1} = 0$ なので式は有効である。